**Тема:** Предел функции в точке. Свойства предела. Раскрытие неопределенностей

**Задания:**

1. **Изучить материал и ответить на вопросы, сделав конспект. Разобрать решение всех примеров, которые приведены в лекции.**

- Предел, обозначение предела. Теоремы о пределах

- Записать основные формулы вычисления предела.

- Разобрать примеры предела при «икс» стремящегося к числу и бесконечности.

**2. Вычислить пределы**

а) ) б) 

в)  г) 

д)  ; е) 

ж)  з) 

**Литература:** Электронная библиотека «Юрайт»

1. Богомолов, Н. В.  Математика. Задачи с решениями в 2 т : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2016. , стр. 10-14.

<https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-t-386520#page/375>

**Срок выполнения – 04 декабря 2020г.**

**Выполненные задания присылать на электронную почту:**

**2021.ivanova@mail.ru**

Название файла, например: **Воробьев А., ОЖЭС-211, 3 декабря**

**Предел. Вычисление пределов.**

Рассмотрим предел http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image002.gif

**Любой предел состоит из трех частей**:

1) Значка предела http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image004.gif.

2) Записи под значком предела, в данном случае http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image006.gif. Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008.gif, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image010.gif).

3) Функции под знаком предела, в данном случае http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image012.gif.

Сама запись http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image002_0000.gif читается так: «предел функции http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image012_0000.gif при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?

Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image016.gif, затем http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image018.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image020.gif, …, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image022.gif, ….  
То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.

Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image024.gif

Итак, первое правило:**Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

Мы рассмотрели простейший предел, когда «икс» стремится к числу (число подставляем в функцию и получаем ответ.

**свойства пределов.**

формула, где *k* – коэффициент.

формула

где С- константа (число)

Пример с бесконечностью:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image026.gif

Разбираемся, что такое http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028.gif? Это тот случай, когда http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0000.gif неограниченно возрастает, то есть: сначала http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image031.gif, потом http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image033.gif, потом http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image035.gif, затем http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image037.gif и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image039.gif?  
http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image041.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image043.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image045.gif, …

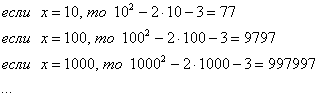
**Итак: если http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0000.gif, то функция http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image039_0000.gif стремится к минус бесконечности**:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image047.gif

**Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image049.gif бесконечность и получаем ответ**.

Еще один пример с бесконечностью:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image051.gif

Опять начинаем увеличивать http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0001.gif до бесконечности и смотрим на поведение функции:  


**Вывод: при http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0001.gif функция http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image056.gif  неограниченно возрастает**:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image058.gif, (т.е.)

Еще разберем несколько примеров:

Пожалуйста, попытайтесь самостоятельно мысленно проанализировать нижеследующее и **запомните** (записать) простейшие виды пределов:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image060.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image062.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image064.gif,

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image066.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image068.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image070.gif,

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image072.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image074.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image076.gif,  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image078.gif

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.  
В том случае, если **http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0002.gif**, попробуйте построить последовательность  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image031_0000.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image033_0000.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image035_0000.gif. Если http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image080.gif, то  http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image082.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image084.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image086.gif.

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image088.gif, то все равно http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image090.gif, **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом**.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

**1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.**

**2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image092.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image094.gif, http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image096.gif и т.д.**

**Пределы с неопределенностью вида http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098.gif и метод их решения**

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда **http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image028_0003.gif**, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

**Пример 1:**

Вычислить предел http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image100.gif

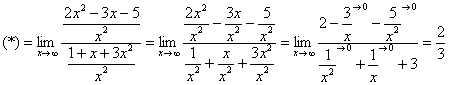
Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается в числителе? Бесконечность. А что получается в знаменателе? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0000.gif. Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0002.gif в старшей степени:  
http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image105.jpg  
Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0003.gif в старшей степени:  
http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image107.jpg  
Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0001.gif необходимо разделить числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0004.gif в старшей степени**.

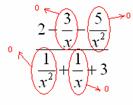
http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image109.gif  
Разделим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image111.gif  


Ответ http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image115.gif.

**Что принципиально важно в оформлении решения?**

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Можно использовать знак http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image117.gif, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:  


**Пример 2**

Найти предел http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image121.gif

Снова в числителе и знаменателе находим http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0005.gif в старшей степени:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image124.jpg  
Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

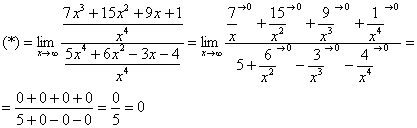
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image126.gif делим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image128.gif.

Полное оформление задания может выглядеть так:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image130.gif

Разделим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image128.gif



**Пример 3**

Найти предел http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image136.gif

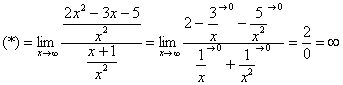
Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image008_0006.gif можно записать как http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image139.gif)

Для раскрытия неопределенности http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image126_0000.gif необходимо разделить числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image141.gif. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image143.gif

Разделим числитель и знаменатель на http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image141_0000.gif



Под записью http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image148.gif подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида http://mathprofi.ru/f/predely_primery_reshenii_clip_image098_0002.gif у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.