**Тема:** Вычисление пределов

**Задания:**

1. Изучите материал и ответьте на вопросы:

- Как вычисляются пределы неопределенностью ноль делить на ноль ?

- Запишите первый замечательный предел, Второй замечательный предел.

2. Разберите примеры вычисления пределов и вычислите по аналогии

**Вычислите пределы:**

а) 

б) 

в0 

г)

д) 

Литература: Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие, Лань 2020. с.152-160

 Режим доступа: <https://e.lanbook.com/reader/book/126952>

**Срок выполнения – до 08 декабря 2020г.**

**Выполненные задания присылать на электронную почту:**

2021.ivanova@mail.ru

**Тема письма: Воробьев А., ОЖЭС-211, 04 декабря**

**Вычисление пределов неопределенностью ноль делить на ноль** (*0 на 0*),

**Раскрывать неопределенности** позволяет:

* упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);

**Пример:** Вычислить предел 

*Решение.*

Подставляем значение:



Пришли к неопределенности. Пробуем упростить выражение.


После преобразования неопределенность раскрылась.

*Ответ:* 

**Пример:** Вычислить предел 

*Решение.*

Подставляем значение:



Пришли к неопределенности (*0 на 0*). Пробуем упростить выражение. Домножим и числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю.

Для знаменателя сопряженным выражением будет 


Знаменатель мы домножали для того, чтобы можно было применить формулу сокращенного умножения – разность квадратов и затем сократить полученное выражение.


После ряда преобразований неопределенность исчезла.

*Ответ:* 

**ЗАМЕЧАНИЕ:** для пределов подобного вида способ домножения на сопряженные выражения является основным.

***Пример.*** Вычислить предел 

*Решение.*

Подставляем значение:



Пришли к неопределенности. Пробуем упростить выражение. Так как и числитель и знаменатель обращаются в ноль при *х=1*, то если [разложить на множители](http://www.cleverstudents.ru/expressions/polynomial_factorization.html) эти выражения и можно будет сократить, то неопределенность исчезнет.

Разложим числитель на множители:



Разложим знаменатель на множители:



Наш предел примет вид:

****

После преобразования неопределенность раскрылась.

*Ответ:* 

**Замечательные пределы.**

**Первый замечательный предел**

Рассмотрим следующий предел: 

Согласно нашему правилу нахождения пределов пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида 

В курсе математического анализа, доказывается, что:  

Данный математический факт носит название **Первого замечательного предела**..

Нередко в практических  заданиях функции могут быть расположены подругому, это ничего не меняет:

 – тот же самый первый замечательный предел.

На практике в качестве параметра  может выступать не только переменная  , но и элементарная функция, сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю**.

**Примеры:**,  ,  ,  

Здесь , , ,  – первый замечательный предел применим.

**Пример** Найти предел 

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела:



Итак, у нас есть неопределенность вида , ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится , а в знаменателе .

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас , значит, в знаменателе нам тоже нужно получить ».
А делается это очень просто:



То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания.
При решении первый замечательный предел желательно выделить:


Обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:

Теперь только осталось избавиться от трехэтажности дроби:

Ответ: 

**Пример** Найти предел 

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль: 

Действительно, у нас неопределенность  и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. Когда у нас есть неопределенность , то нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы представим в виде произведения (множителей):



Под синусами у нас , значит, в числителе тоже нужно получить :



Обводим замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:



Ответ готов:



## ****Второй замечательный предел****

 - Это  **второй замечательной предел**.

Справка: ** – это иррациональное число.

В качестве параметра  может выступать не только переменная , но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

**Пример** Найти предел 

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение  .

Нетрудно заметить, что при ** основание степени , а показатель – **, то есть имеется, неопределенность вида :



Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. В данном примере параметр , значит, в показателе нам тоже нужно организовать  . Для этого возводим основание в степень , и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень :



Второй замечательный пример обозначаем:


Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву :

**При этом сам значок предела перемещаем в показатель**:
