**Тема:** Вычисление пределов

**Задания:**

1. Изучите материал и ответьте на вопросы:

- Как вычисляются пределы неопределенностью ноль делить на ноль ?

- Запишите первый замечательный предел, Второй замечательный предел.

2. Разберите примеры вычисления пределов и вычислите по аналогии

**Вычислите пределы:**

а) 

б) 

в0 

г)

д) 

Литература: Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие, Лань 2020. с.152-160

Режим доступа: <https://e.lanbook.com/reader/book/126952>

**Срок выполнения – до 08 декабря 2020г.**

**Выполненные задания присылать на электронную почту:**

[2021.ivanova@mail.ru](mailto:2021.ivanova@mail.ru)

**Тема письма: Воробьев А., ОЖЭС-211, 04 декабря**

**Вычисление пределов неопределенностью ноль делить на ноль**формула (*0 на 0*),

**Раскрывать неопределенности** позволяет:

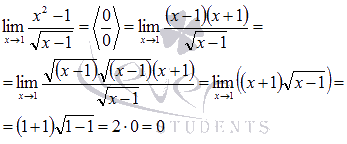
* упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);

**Пример:** Вычислить предел формула

*Решение.*

Подставляем значение:

формула

Пришли к неопределенности. Пробуем упростить выражение.  


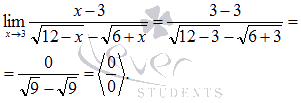
После преобразования неопределенность раскрылась.

*Ответ:* формула

**Пример:** Вычислить предел формула

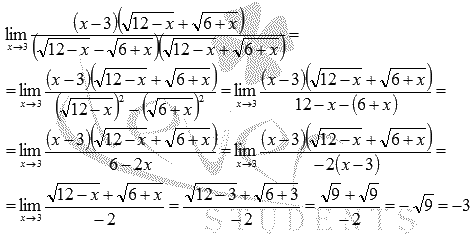
*Решение.*

Подставляем значение:



Пришли к неопределенности (*0 на 0*). Пробуем упростить выражение. Домножим и числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю.

Для знаменателя сопряженным выражением будет формула  
формула

Знаменатель мы домножали для того, чтобы можно было применить формулу сокращенного умножения – разность квадратов и затем сократить полученное выражение.  


После ряда преобразований неопределенность исчезла.

*Ответ:* формула

**ЗАМЕЧАНИЕ:** для пределов подобного вида способ домножения на сопряженные выражения является основным.

***Пример.*** Вычислить предел формула

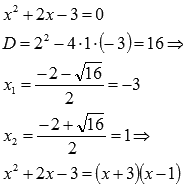
*Решение.*

Подставляем значение:

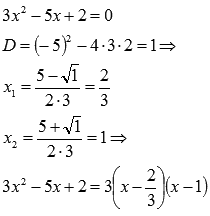
формула

Пришли к неопределенности. Пробуем упростить выражение. Так как и числитель и знаменатель обращаются в ноль при *х=1*, то если [разложить на множители](http://www.cleverstudents.ru/expressions/polynomial_factorization.html) эти выражения и можно будет сократить, то неопределенность исчезнет.

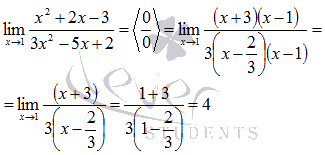
Разложим числитель на множители:



Разложим знаменатель на множители:



Наш предел примет вид:

****

После преобразования неопределенность раскрылась.

*Ответ:* формула

**Замечательные пределы.**

**Первый замечательный предел**

Рассмотрим следующий предел: http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image002.gif

Согласно нашему правилу нахождения пределов пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image004.gif

В курсе математического анализа, доказывается, что:  http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image006.gif

Данный математический факт носит название **Первого замечательного предела**..

Нередко в практических  заданиях функции могут быть расположены подругому, это ничего не меняет:

http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image008.gif – тот же самый первый замечательный предел.

На практике в качестве параметра http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image012.gif может выступать не только переменная http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image014.gif , но и элементарная функция, сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю**.

**Примеры:**http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image016.gif,  ,  http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image020.gif,  http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image022.gif

Здесь http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image024.gif, http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image026.gif, http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image028.gif, http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image030.gif – первый замечательный предел применим.

**Пример** Найти предел http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image042.gif

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

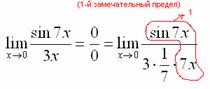
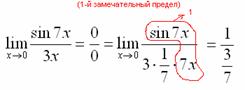
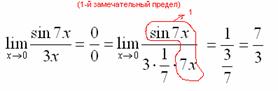
Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела:  
  
http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image044.gif

Итак, у нас есть неопределенность вида http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image004_0000.gif, ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image047.gif, а в знаменателе http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image049.gif.

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image047_0000.gif, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image047_0001.gif».  
А делается это очень просто:

http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image051.gif

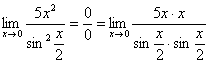
То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания.  
При решении первый замечательный предел желательно выделить:

  
Обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:  
  
Теперь только осталось избавиться от трехэтажности дроби:  
  
Ответ: http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image059.gif

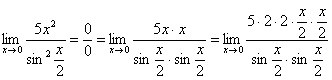
**Пример** Найти предел 

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль: 

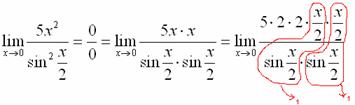
Действительно, у нас неопределенность http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image004_0001.gif и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. Когда у нас есть неопределенность http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image004_0002.gif, то нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы представим в виде произведения (множителей):



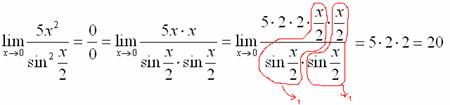
Под синусами у нас http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image072.gif, значит, в числителе тоже нужно получить http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image072_0000.gif:



Обводим замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:



Ответ готов:



## ****Второй замечательный предел****

http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image118.gif - Это  **второй замечательной предел**.

Справка: *http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image120.gif* – это иррациональное число.

В качестве параметра http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image012_0000.gif может выступать не только переменная http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image014_0000.gif, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

**Пример** Найти предел http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image122.gif

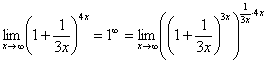
Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение  http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image124.gif.

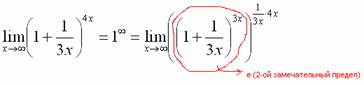
Нетрудно заметить, что при *http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image126.gif* основание степени http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image128.gif, а показатель – *http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image130.gif*, то есть имеется, неопределенность вида http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image132.gif:

http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image134.gif

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. В данном примере параметр http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image136.gif, значит, в показателе нам тоже нужно организовать  http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image049_0000.gif. Для этого возводим основание в степень http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image049_0001.gif, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image140.gif:



Второй замечательный пример обозначаем:

  
Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву http://mathprofi.ru/f/zamechatelnye_predely_clip_image146.gif:

**При этом сам значок предела перемещаем в показатель**:  
