**ТЕМА**: Случайные величины. Математическое ожидание, дисперсия Среднее квадратическое отклонение случайной величины

Задание:

1. ответьте на вопросы

- Дайте определение математического ожидания дискретной случайной величины и запишите формулу ее нахождения

- Дайте определение дисперсии дискретной случайной величины и запишите формулу ее нахождения.

- Дайте определение среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины и запишите формулу ее нахождения.

2. Разберите задачи на нахождение характеристик дискретной случайной величины и выполните задания:

1. Дискретная случайная величина задана своим законом распределения:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image068.jpg

Найти http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image070.gif

***Случайной*** называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image002.gif **\***, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image004.gif.

Рассмотрим следующую случайную величину:

http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008.gif – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** одна грань, какая именно – не предсказать; при этом случайная величина http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0000.gif может принять одно из следующий значений:

http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image010.gif.

Составим закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Хi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Pi | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

**1. Математическое ожидание дискретной случайной величины**

- это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0002.gif принимает значения http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image022_0000.gifс вероятностямиhttp://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image072.gif соответственно.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Хi | x1 | x2 | X3 | … | xn |
| Pi | p1 | p2 | p3 | … | pn |

Тогда математическое ожидание http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image074.gif данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image076.gif

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0003.gif – количества выпавших на игральном кубике очков (таблица распределения приведена выше):

http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image078.gif очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близко к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе.

**Пример**

Мистер ***Z*** играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0004.gif – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

***Справка****: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

***Решение****:* Случайная величина Х принимает только 2 значения: выигрыш 100 рублей или их проигрыш. Игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37 и соответственно проигрывает 100 рублей в 19 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Хi | 100 | -100 |
| Pi | 18/37 | 19/37 |

*Вычислим математическое ожидание:*

*http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image112.gif*  
*Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.*

Пример

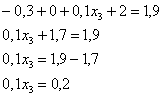
Случайная величина http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image008_0005.gif задана своим законом распределения вероятностей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Хi | -1 | 0 | Х3 | 5 |
| Pi | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |

Найти http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image087.gif, если известно, что http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image089.gif. Выполнить проверку.

***Решение****: по определению математического ожидания:*

*http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image114.gif*  
*поменяем части местами и проведём упрощения:*

**  
*таким образом:*

*http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image118.gif*

*Выполним проверку:*

*http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image120.gif*  
*http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image122.gif, что и требовалось проверить.*

**2 .** Второй характеристикой случайной величины является **Дисперсия** случайной величины – это  средневзвешенное значение квадратов отклонений. http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image020.gif. **Дисперсия не может быть отрицательной**.

### ****Формула для нахождения дисперсии****

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image038.gif

**3 характеристика – Среднее квадратическое отклонение** – это величина равная корню квадратному из дисперсии случайной величины. Обозначается греческой буквой «сигма»:  
http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image028.gif

**Пример.** Пусть задан закон распределения случайной величины Х

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Хi | -5 | 2,5 | 10 |
| Pi | 0,5 | 0,4 | 0,1 |

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

1. Найдем математическое ожидание:

М(Х) = http://mathprofi.ru/t/sluchainaya_velichina_clip_image082.gif.

2. Вычислим дисперсию. Сначала найдём математическое ожидание http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image041.gif – квадрата случайной величины http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image043.gif.

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image045.gif

В данном случае:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image047.gif

Таким образом, по формуле:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image049.gif

3. Найдем среднее квадратическое отклонение:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image028.gif

Ответ: -0,5; 24,75; 5

**Пример**

Дискретная случайная величина http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image043_0001.gif может принимать только два значения: http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image073.gif и http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image075.gif, причём http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image077.gif. Известна вероятность http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image079.gif, математическое ожидание http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image081.gif и дисперсия http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image083.gif.

Найти http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image085.gif. Записать закон распределения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Хi | x1 | x2 |
| Pi | 0,4 | P2 |

**Решение**: Так как случайная величина может принять только два значения, то сумма вероятностей соответствующих событий:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image087.gif

и поскольку http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image079_0000.gif, то http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image089.gif.

Осталось найти http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image091.gif. По определению математического ожидания:

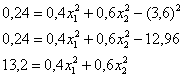
http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image093.gif – подставляем известные величины:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image095.gif Перепишем его в привычном направлении:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image097.gif

По формуле вычисления дисперсии:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image099.gif – подставляем известные данные:



или: http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image103.gif

Составим и решим систему:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image105.gif

Умножаем оба уравнения на 10:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image107.gif

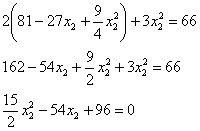
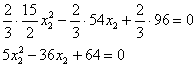
и разделим оба уравнения на 2:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image109.gif

Из 1-го уравнения выражаем *х1*:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image111.gif – подставляем во 2-е уравнение:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image113.gif  
Возводим [в квадрат](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf) и проводим упрощения:

  
Умножаем на http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image117.gif:  


В результате получено [квадратное уравнение](http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf), находим его дискриминант:  
http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image121.gif, http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image123.gif

и у нас получается два решения:

1) если http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image125.gif, то http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image127.gif;

2) если http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image129.gif, то http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image131.gif.

Условию http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image077_0000.gif удовлетворяет первая пара значений.

Запишем закон распределения:

http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image133.jpg  
**Ответ**: http://mathprofi.ru/t/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny_clip_image139.gif

**Срок выполнения – до 02 декабря 2020г.**

**Выполненные задания присылать на электронную почту:**

[**2021.ivanova@mail.ru**](mailto:2021.ivanova@mail.ru)

Название файла, например: **Семенычева К., ОЖПХ-211, 01 декабря**

**Литература:** Электронно-библиотечная система «Лань»

1. Лисичкин, В. Т. Математика в задачах с решениями : учебное пособие URL: <https://e.lanbook.com/reader/book/126952/#463>, стр. 406 - 423.