

Решение комбинаторных задач

Цель: закрепить знания и навыки в решении комбинаторных задач

Методические указания и теоретические сведения к практической работе

Основные понятия комбинаторики

Определение.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют **n - факториалом** и пишут

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n , где n - число элементов, входящих в каждую перестановку. (P - первая буква французского слова *permutation*- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

или с помощью факториала:

$$P_n = n!$$

$$0! = 1 \text{ и } 1! = 1.$$

Размещения.

Определение. Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n , где m - число всех имеющихся элементов, n - число элементов в каждой комбинации.

При этом полагают, что $n \leq m$.

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Сочетания.

Определение. Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n -натуральные числа, причем $n \leq m$).

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! n!}$$

Число сочетаний из m элементов по n обозначаются C_m^n .

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n , деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Правило суммы.

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b , то выбор “ a или b ” можно сделать $m + n$ способами.

Правило произведения.

Если из некоторого множества A элемент a_i можно выбрать K_A способами, а элемент b_j из множества $B - K_B$ способами, то совокупность $(a_i ; b_j)$ можно образовать $K_A \cdot K_B$ способами. Правило верно и для совокупностей, состоящих из большего, чем два числа элементов.

Перестановки с повторением.

Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестановок, который называется перестановками с повторениями.

Пусть имеется n_1 предметов 1-го типа, n_2 предмета 2-го, n_k предметов k -го типа и при этом $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Количество разных перестановок предметов

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{(n_1! n_2! n_3! \dots n_k!)}$$

Размещения с повторениями.

Пусть даны элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ (a)

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется всякая упорядоченная последовательность из k элементов, членами которой являются данные элементы. В размещении с повторениями один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах.

Формула для числа размещений с повторениями.

Каждый элемент может быть выбран n способами, поэтому :

$$\overline{A}_n^k = n^k, \text{ где } \overline{A}_n^k - \text{обозначение размещений с повторениями.}$$

Примеры типовых расчетов: выполняется всей группой вместе с преподавателем.

Пример 1. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример 2. Сколько вариантов распределения на практику в три ресторана различного профиля можно составить для пяти студентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Пример 3. Из группы в 25 человек нужно выделить четырех для работы официантами на банкете. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$

2. Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$

3. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

4. Упростить $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

5. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$

6. Вычислить A_8^4

7. Вычислить C_{10}^4

8. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «солнце», «молоко»?

9. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,8,9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

10. Учащиеся изучают 12. Предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы 6 уроков были различными?

11. Сколькими способами можно составить дежурство по классу по 4 человека, если в классе 28 человек?

12. Решить уравнение $C_{x-2}^2 = 21$

Критерии оценки:

Оценка «5» ставится за 10 верно выполненных задания

Оценка «4» ставится за 7 верно выполненных задания

Оценка «3» ставится за 5 верно выполненное задание

Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие/В.Т.Лисичкин,И.Л. Соловейчик.-7-е изд.,стер.-Санкт-Петербург:Лань,2020-464 с.:ил.

Режим доступа <https://e.lanbook.com/reader/book/126952>

Данное задание должно быть выполнено до 28.11.20 и выслано на электронную почту

natali.makshanowa@yandex.ru

