**Тема:** Формулы приведения

**Задания:**

1. Запишите формулы приведения
2. Объясните термин «кофункция»
3. Как определить знак перед конечной функцией (плюс или минус)?
4. Как определить меняется ли функция на кофункцию или нет?
5. Разберите примеры и выполните задания

   1. *Найдите значения выражений:*

      а) $\sin 300^\circ$ б) $\text{ctg } 2280^\circ$ в) $\cos 840^\circ$

      ж) $\sin^2(-330^\circ) - \cos^2(-120^\circ) - \text{tg}^2(-240^\circ) + \text{ctg}^2(-330^\circ)$

      з) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)+tg(\pi-\alpha)-ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

   2. *Упростите выражение:*

      а) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi+\alpha)}$

      б) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-\dfrac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{ctg(\pi-\alpha)}+tg(\pi-\alpha)$

   Литература: Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие, Лань 2020. с.42-43

   Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/126952

**Срок выполнения – до 23 ноября 2020г.**

**Выполненные задания присылать на электронную почту:**
**2021.ivanova@mail.ru**

**Тема письма: Воробьев А., ОЖЭС-111, 21 ноября**

# Формулы приведения.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$ | $\sin(\pi+a)=-\sin a$ | $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$ | $\sin(2\pi+a)=\sin a$ |
| $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$ | $\cos(\pi+a)=-\cos a$ | $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a$ | $\cos(2\pi+a)=\cos a$ |
| $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{ctg}\, a$ | $\mathrm{tg}\,(\pi+a)=\mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{ctg}\, a$ | $\mathrm{tg}\,(2\pi+a)=\mathrm{tg}\, a$ |
| $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{ctg}\,(\pi+a)=\mathrm{ctg}\, a$ | $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{ctg}\,(2\pi+a)=\mathrm{ctg}\, a$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$ | $\sin(\pi-a)=\sin a$ | $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a$ | $\sin(2\pi-a)=-\sin a$ |
| $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$ | $\cos(\pi-a)=-\cos a$ | $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a$ | $\cos(2\pi-a)=\cos a$ |
| $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\mathrm{ctg}\, a$ | $\mathrm{tg}\,(\pi-a)=-\mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\mathrm{ctg}\, a$ | $\mathrm{tg}\,(2\pi-a)=-\mathrm{tg}\, a$ |
| $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{ctg}\,(\pi-a)=-\mathrm{ctg}\, a$ | $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\mathrm{tg}\, a$ | $\mathrm{ctg}\,(2\pi-a)=-\mathrm{ctg}\, a$ |

Формулы приведения разработаны для углов, представленных в одном из следующих видов: $\pi/2+a$, $\pi/2-a$, $\pi+a$, $\pi-a$, $3\pi/2+a$, $3\pi/2-a$, $2\pi+a$ и $2\pi-a$. Аналогично их можно использовать для углов представленных в градусах: $90°+a$, $90°-a$, $180°+a$, $180°-a$, $270°+a$, $270°-a$, $360°+a$, $360°-a$.

Учить наизусть формулы привидения вам не придется, потому что есть легкий и надежный способ вывести можно за пару секунд

# Как быстро получить любую формулу приведения.

Для начала обратите внимание, что все формулы имеют похожий вид:

аргумент функции
в одном из 16 видов

$\frac{\pi}{2}+a,\quad \pi+a,\quad \frac{3\pi}{2}+a,\quad 2\pi+a,$

$\frac{\pi}{2}-a,\quad \pi-a,\quad \frac{3\pi}{2}-a,\quad 2\pi-a,$

$90^\circ+a,\ 180^\circ+a,\ 270^\circ+a,\ 360^\circ+a,$

$90^\circ-a,\ 180^\circ-a,\ 270^\circ-a,\ 360^\circ-a,$

конечная функция
(либо та же самая,
либо кофункция
к исходной)

$$\boxed{\phantom{xxxx}}\left(\boxed{\phantom{x}}\right) = \underline{\phantom{xxx}}\ \boxed{\phantom{xxxx}}\,a$$

исходная
функция

знак:
либо “+”, либо “-”

всегда
только $a$

Здесь нужно пояснить термин «кофункция» - это та же самая функция с добавлением или убиранием приставки «ко-». То есть, для *синуса* кофункцией будет **ко***синус*, а для **ко***синуса* – *синус*. С тангенсом и котангенсом – аналогично.

| *Функция*: | | *Кофункция*: |
|---|---|---|
| sin a | → | cos a |
| cos a | → | sin a |
| tg a | → | ctg a |
| ctg a | → | tg a |

Таким образом, например, синус при применении этих формул никогда не поменяется на тангенс или котангенс, он либо останется синусом, либо превратиться в косинус. А котангенс никогда не станет синусом или косинусом, он либо останется котангенсом, либо станет тангенсом. И так далее.

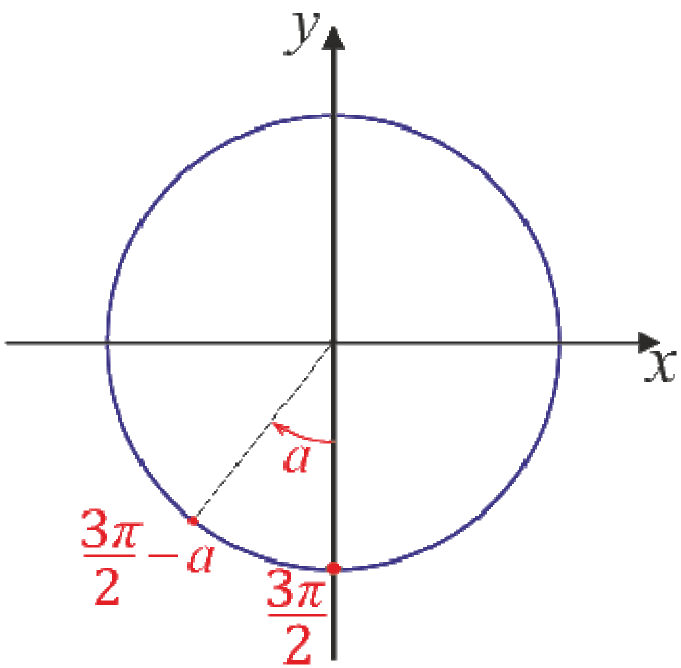
Так как исходная функция и ее аргумент нам обычно даны, то весь вывод нужной формулы сводится к двум вопросам:
- как определить знак перед конечной функцией (плюс или минус)?
- как определить меняется ли функция на кофункцию или нет?

## Как определить знак перед конечной функцией (плюс или минус)?

**Какой знак был у исходной функции в исходной четверти, такой знак и нужно ставить перед конечной функцией.**

Например, выводим формулу приведения для $\cos(3\pi/2-a)=$.... С исходной функцией понятно – косинус, а исходная четверть?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, **представим, что** a **– угол от** 0 **до** $\pi/2$, т.е. лежит в пределах 0°…90° (хотя это может быть не так, но для определения знака данная условность необходима). В какой четверти тригонометрической окружности при таком условии будет находиться точка, обозначающая угол $3\pi/2-a$?
Чтобы ответить на вопрос, надо от точки, обозначающей $3\pi/2$, повернуть в отрицательную сторону на угол a.




Мы окажемся в третьей четверти. А косинус в третьей четверти имеет знак Минус. Поэтому перед итоговой функцией будет стоят минус: cos(3π/2−a)=−...

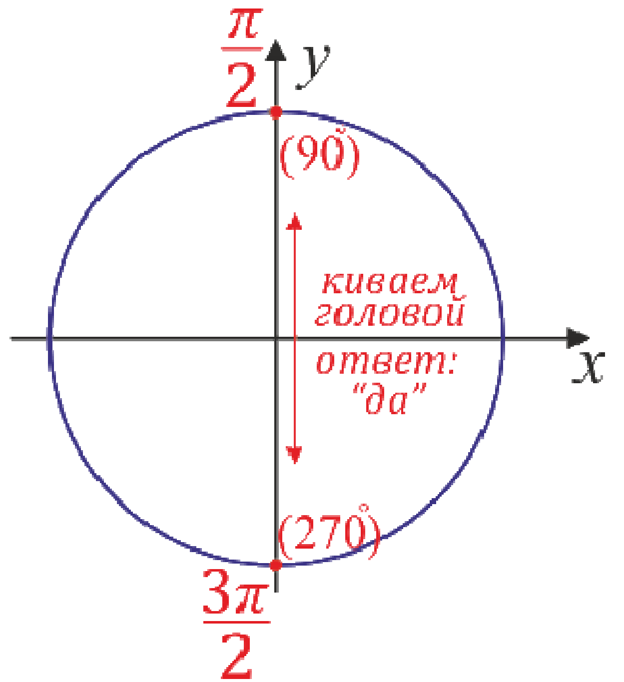
## Менять ли функцию на кофункцию или оставить прежней?

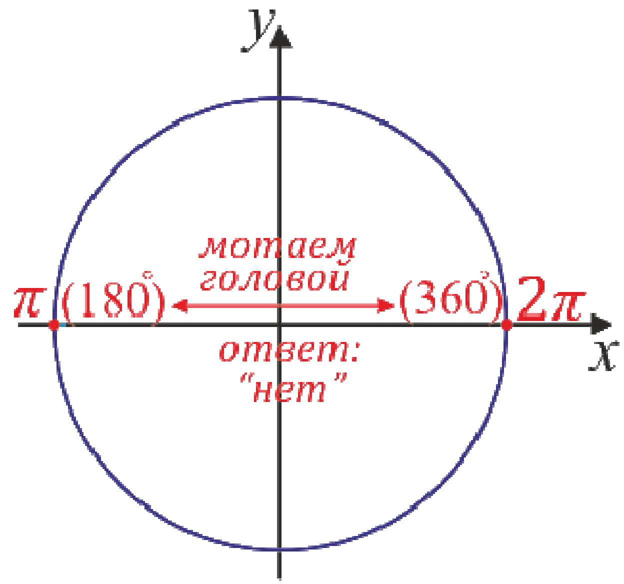
Здесь правило еще проще:

**- если «точка привязки»** π/2 (90°) **или** 3π/2 (270°) **– функция меняется на кофункцию;**
**- если «точка привязки»** π(180°) **или** 2π (360°) **– функция остается той же.**

То есть, при аргументах исходной функции π/2+a, π/2−a, 3π/2+a или 3π/2−a, мы должны поменять функцию, а при аргументах π+a, π−a, 2π+a или 2π−a - нет. Для того чтоб это легче запомнить, вы можете воспользоваться мнемоническим правилом, которое называют «лошадиным правилом»:

Точки, обозначающие π/2 (90°) и 3π/2 (270°), расположены вертикально, и если вы переводите взгляд с одной на другую и назад, вы киваете головой, как бы говоря «да».




Точки же, обозначающие π (180°) и 2π (360°), расположены горизонтально, и если вы переводите взгляд между ними, вы мотаете головой, как бы говоря «нет».

Эти «да» и «нет» - и есть ответ на вопрос: «меняется ли функция?».
Таким образом, согласно правилу, в нашем примере выше cos(3π/2−a)=… косинус будет меняться на синус. В конечном итоге получаем, cos(3π/2−a)=−sin a. Это и есть верная формула приведения.

## Примеры с формулами приведения:

Они позволяют упрощать выражения или находить значения некоторых тригонометрических выражений без использования калькулятора.

**Пример 1.** Найти значение выражений:
а) 1 способ

$\sin 300^\circ = \sin(270^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 способ

$\sin 300^o = \sin(360^o - 60^o) = -\sin 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\mathrm{tg}\, 600^o = \mathrm{tg}(180^o \cdot 3 + 60^o) = \mathrm{tg}\, 60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$

***Пример 2***. Найдите значение выражения $\frac{18\cos 41°}{\sin 49°}$

*Решение:*

$$\frac{18\cos 41°}{\sin 49°} = \frac{18\, cos 41°}{\sin(90° - 41°)} = \frac{18 cos 41°}{\cos 41°} = 18$$

Углы 41° и 49° нестандартные, поэтому без калькулятора вычислить непросто. Однако используя формулы привидения, мы легко найдем правильный ответ. Прежде всего, обратите внимание на один важный момент: 49°=90°−41°. Поэтому мы можем заменить 49° на (90°−41°).

Теперь применим к синусу формулу приведения:

- 90°−41° – это первая четверть, синус в ней положителен. Значит, знак будет плюс;
- 90°- находится на «вертикали» - функция меняется на кофункцию.

Значит, $\sin 49^o = \sin(90° - 41°) = \cos 41°$

В числителе и знаменателе получились одинаковые косинусы. Сокращаем их.

Записываем ответ

Ответ: 18

***Пример 3***. Найдите значение выражения $\frac{3\sin(\pi-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$

*Решение:*

$$\frac{3\sin(\pi-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)} = \frac{3\sin\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha}$$

$$= \frac{4\sin\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{4}{-1} = -4$$

Рассмотрим первое слагаемое числителя: sin (π–a). Воспользуемся формулами приведения, выведя ее самостоятельно:
(π–a) - это вторая четверть, а синус во второй четверти положителен. Значит, знак будет плюс;
π это точка «горизонтальная», то есть по движению головы, значит функция остается той же.
Таким образом, sin(π–a) = sin a

Рассмотрим второе слагаемое числителя: cos ($\frac{\pi}{2}$ + a):
($\frac{\pi}{2}$ + a) - это вторая четверть, а косинус во второй четверти отрицателен. Значит, знак будет минус.
$\frac{\pi}{2}$ — это точка «вертикальная», то есть «киваем», значит, функция меняется на кофункцию – на синус.
Таким образом, cos ($\frac{\pi}{2}$ + a) = – sin a

Рассмотрим знаменатель: cos($\frac{3\pi}{2}$ – a).

Мы его разобрали выше, он равен минус синусу. cos($\frac{3\pi}{2}$ – a) = – sin a

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые.

сократив на sin a, получаем ответ.

Ответ: –4

***Пример 3***. Вычислить чему равен $ctg(-\alpha - \frac{7\pi}{2})$, если tg a = 2

*Решение:*

$ctg(-\alpha - \frac{7\pi}{2})$ = $ctg\left(-\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) =$ $ctg(-(\frac{7\pi}{2} + \alpha))$ = = - $ctg\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$ = - $ctg\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$ = - ctg $(\frac{6\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha)$ = $-ctg\left(3\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) =$ $-\left(-ctg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right) = tg\alpha = 2$

Здесь сразу формулу приведения применять нельзя, так как аргумент нестандартный. Прежде всего, $\alpha$ стоит первой, хотя должна быть после «точки привязки». Поменяем местами слагаемые аргумента, сохраняя знаки. Уже лучше, но все еще есть проблемы – «точка привязки» с минусом, а такого аргумента у нас нет. Избавимся от минуса, вынеся его за скобку внутри аргумента.
Теперь вспомним о том, что котангенс – функция нечетная, то есть ctg($-\alpha$) = $-$ctg $\alpha$. Преобразовываем наше выражение. Несмотря на то, что точка привязки $\frac{7\pi}{2}$ мы все равно можем использовать формулы приведения, потому что $\frac{7\pi}{2}$ лежит на пересечении одной из осей и числовой окружности. ($\frac{7\pi}{2}$+ $\alpha$) - это четвертая четверть, и котангенс там отрицателен. «Точка привязки» - вертикальная, то есть функцию меняем. Окончательно имеем ctg($\frac{7\pi}{2}$+ $\alpha$) = $-$ tg $\alpha$. Готов ответ.

*Ответ:* 2