ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Ожерельевский ж.д. колледж - филиал ПГУПС

СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДАЮ
Методист	Заместитель директора по УР
___________Л.А. Елина	_____________ Н.Н. Иванова
«____»_________20 г.	*«____» __________ 20 г.*

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине Математика

специальность 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям)

2017

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ составлены в соответствии с требованиями ФГОС к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников СПО по специальности 13.02.07. Электроснабжение (по отраслям) и на основе рабочей программы дисциплины «Математика».

Данная дисциплина относится к блоку математическому и общему естественнонаучному циклу дисциплин, устанавливающих базовые знания для освоения ПМ.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь:**

– решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

– значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;
– основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;
– основы интегрального и дифференциального исчисления.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование общих компетенций, включающих в себя способность:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды(подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей по специальности и овладению профессиональными компетенциями, соответствующими основным видам профессиональной деятельности:

- ПК 1.1. Читать и составлять электрические схемы электрических подстанций и сетей.
- ПК 1.2. Выполнять основные виды работ по обслуживанию трансформаторов и преобразователей электрической энергии.
- ПК 1.3. Выполнять основные виды работ по обслуживанию оборудования распределительных устройств электроустановок, систем релейных зашит и автоматизированных систем.
- ПК 1.4. Выполнять основные виды работ по обслуживанию воздушных и кабельных линий электроснабжения.
- ПК 1.5. Разрабатывать и оформлять технологическую и отчетную документацию.
- ПК 2.1. Планировать и организовывать работу по ремонту оборудования.
- ПК 2.2. Находить и устранять повреждения оборудования.
- ПК 2.3. Выполнять работы по ремонту устройств электроснабжения.
- ПК 2.4. Оценивать затраты на выполнение работ по ремонту устройств электроснабжения.
- ПК 2.5. Выполнять проверку и анализ состояния устройств и приборов, используемых при ремонте и наладке оборудования.
- ПК 2.6. Производить настройку и регулировку устройств и приборов для ремонта оборудования электрических установок и сетей.

Рабочая программа учебной дисциплины предусматривает 40 часов практических работ.

Перечень практических работ

№ п/п	Название работы	Объем часов
1.	Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.	2
2.	Действия над матрицами. Вычисление определителей II и III порядка.	2
3.	Решение систем линейных уравнений матричным способом.	2
4.	Решения систем трех уравнений с тремя неизвестными с помощью формул Крамера.	2
5.	Решения систем трех уравнений с тремя неизвестными с помощью метода Гаусса.	2
6.	Вычисление производных сложной функции.	2
7.	Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.	2
8.	Исследование функций на монотонность, точки экстремума, выпуклость, вогнутость.	2
9.	Исследование и построение графика функции.	2
10	Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал.	2
11.	Вычисление интегралов.	2
12.	Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла.	2
13.	Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными.	2
14.	Дифференциальные уравнения 1 порядка.	2
15.	Решение дифференциальных уравнений.	2
16.	Численные ряды, сходимость и расходимость. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.	2
17.	Множества. Операции над множествами.	2
18.	Основные понятия комбинаторики.	2
19.	Основные понятия теории вероятностей. События. Операции над событиями.	2
20.	Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.	2
	ИТОГО	40

Содержание практических работ.

Практическая работа№1.

Тема: **Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.**

Цель: Научить выполнять различные действия с комплексными числами; переводить комплексные числа из алгебраической формы и обратно;

Краткие теоретические сведения:

- **Понятие комплексного числа и его геометрическая интерпретация.**
- **Действия над комплексными числами в алгебраической форме.**
- **Тригонометрическая форма комплексного числа.**
- **Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.**

1. Понятие комплексного числа и его геометрическая интерпретация.

Определение 1: Комплексными числами называются числа вида $a + вi$, где a и $в$ - действительные числа, а число z, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется мнимой единицей, если для этих чисел понятия равенства и действия сложения и умножения определены следующим образом:

1). Два комплексных числа $a_1 + в_1 i$ и $a_2 + в_2 i$ называются равными, если $a_1 = a_2$, $в_1 = в_2$;

2). Суммой двух комплексных чисел $a_1 + в_1 i$ и $a_2 + в_2 i$ называется комплексное число $(a_1 + a_2) + (в_1 + в_2)i$;

3). Произведением двух комплексных чисел $a_1 + в_1 i$ и $a_2 + в_2 i$ называется комплексное число $(a_1 a_2 - в_1 в_2) + (a_1 в_2 + a_2 в_1)i$;

Запись комплексного числа в виде $z = a + вi$ *называется* ***алгебраической формой*** *записи комплексного числа, где* a *называется* ***действительной частью*** *комплексного числа, а* $в$ *-**мнимой частью**.*

<u>Пример1</u>: 7+3i

Любое действительное число содержится в множестве комплексных чисел. Поэтому его можно записать так: $a + 0i$.

Пример: 4=4+0i

Определение 2: Комплексное число $a - вi$ называется *комплексно сопряженным*

с числом $a + вi$ и обозначается $\bar{z}$, то есть $\bar{z} = \overline{a + вi} = a - вi$.

<u>Пример2</u>: 2+5i и 2-5i

Определение 3: Модулем комплексного числа $z = a + вi$ называется число

$$\sqrt{a^2 + в^2} : |z| = |a + вi| = \sqrt{a^2 + в^2}. \text{ Причем } |z| \ge 0.$$

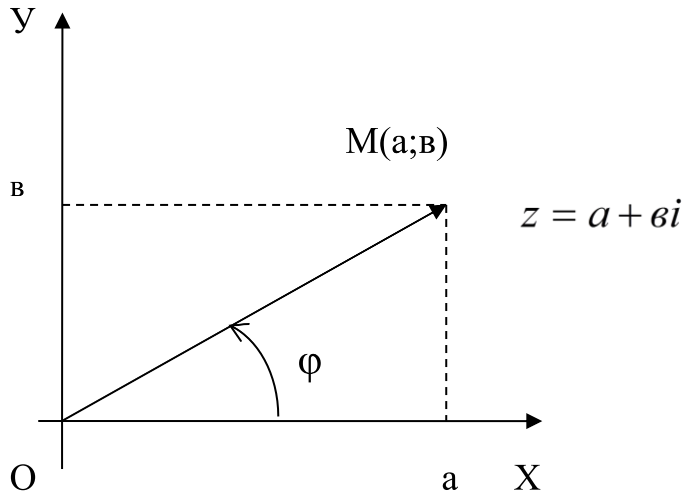
Комплексное число можно изобразить двумя способами:

1. Точкой плоскости с координатами (а;в).

При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют *действительной осью*, а чисто мнимые числа- точками оси ординат, которую называют *мнимой осью.*

2. В виде вектора с началом в начале координат ($z = 0$) и концом в точке М(а;в) ($z = a + вi$).

Каждой точке плоскости с координатами (а;в) соответствует один и только один вектор с началом в точке О(0;0) и концом в точке М(а;в),поэтому комплексное число $a + вi$ можно изобразить в виде вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$.



Определение 4: Угол φ между действительной осью ОХ и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется *аргументом* комплексного числа. Если отсчет ведется против движения часовой стрелки, то величина угла считается положительной, иначе- отрицательной.

$\varphi = \arg z = \arg(a + вi)$

Любое комплексное число имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента из промежутка $-\pi < \varphi \le \pi$ называется *главным значением аргумента*.

Из определения тригонометрических функций следует:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + в^2}}; \sin\varphi = \frac{в}{\sqrt{a^2 + в^2}}; tg\varphi = \frac{в}{a}$$

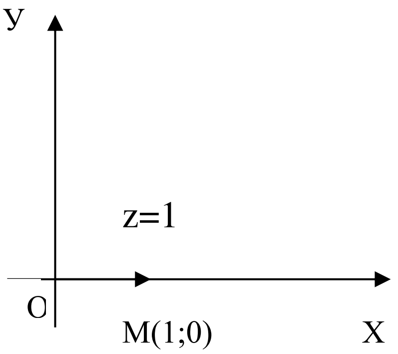
<u>Пример3:</u>

Изобразить геометрическую интерпретацию комплексного числа, найти модуль комплексного числа и главное значение аргумента.

а). $z = 1$; б). $z = -5i$; в). $z = 2 - 2i$.

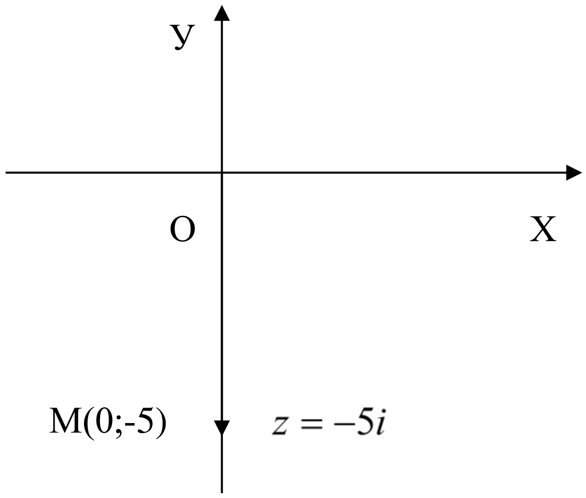
Решение:

а). $z = 1$



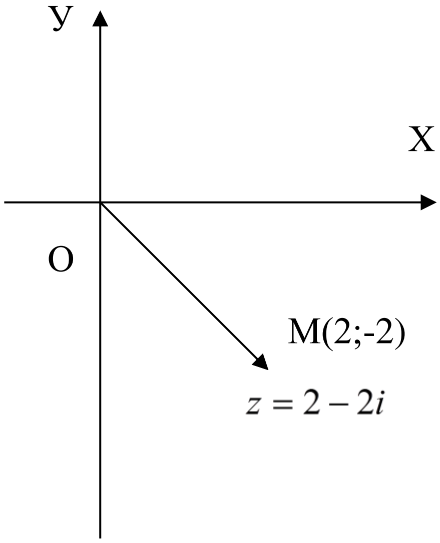
$|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$; $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 1; \varphi = 0^0$

б). $z = -5i$



$|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$; $\sin\varphi = \dfrac{-5}{\sqrt{0^2 + (-5)^2}} = \dfrac{-5}{5} = -1; \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

в). $z = 2 - 2i$



$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = -2\sqrt{2}$ $;tg\varphi = \frac{-2}{2} = -1; \varphi = -\frac{\pi}{4}$

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Сложение и умножение комплексных чисел мы ввели в определении комплексного числа. Введем правила вычитания и деления комплексных чисел:

$(a_1 + в_1 i) - (a_2 + в_2 i) = (a_1 - a_2) + (в_1 - в_2)i$;

$\frac{a_1 + в_1 i}{a_2 + в_2 i} = \frac{a_1 a_2 + в_1 в_2}{a_2^2 + в_2^2} + \frac{a_2 в_1 - a_1 в_2}{a_2^2 + в_2^2} i$.

Но удобнее всего действия над комплексными числами производить с помощью правил соответствующих действий над многочленами и понятием мнимой единицы.

<u>Пример4</u>:

Выполнить действия:

а). i^5; б). i^6; в). i^7; г). $(4+2i)+(-3+7i)$; д). $(-5+2i)-(3+7i)$; е). $(2+3i)(5+7i)$;

ж). $\frac{2}{3i}$; з). $\frac{1}{1+i}$; и). $\frac{1+i}{1-i}$; к). $\frac{2-3i}{4+5i}$.

<u>Решение:</u>

а). $i^5 = i^{4+1} = i^4 \cdot i^1 = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = i$;

б). $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3$;

в). $i^7 = i^6 \cdot i = (i^2)^3 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i$;

г). $(4+2i)+(-3+7i) = (4-3)+(2+7)i = 1+9i$;

д). $(-5+2i)-(3+7i) = (-5-3)+(2-7)i = -8-5i$;

е). $(2+3i)(5+7i) = 10+14i+15i+21i^2 = 10+29i+21\cdot(-1) = -11+29i$;

ж). $\frac{2}{3i} = \frac{2\cdot i}{3i\cdot i} = \frac{2i}{3i^2} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$;

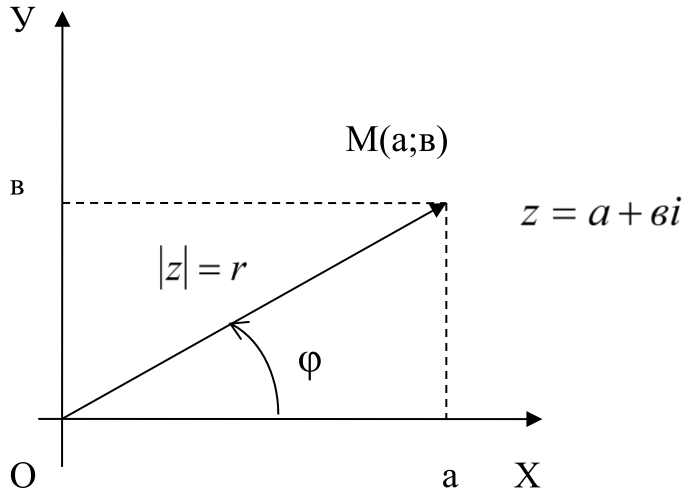
з). $\frac{1}{1+i} = \frac{1\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

и). $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$;

к). $\frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)\cdot(4-5i)}{(4+5i)\cdot(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16-25i^2} = \frac{8-22i-15}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i$.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Изобразим комплексное число $z = a + вi$ геометрически:



Обозначим модуль комплексного числа $|z| = |a + вi| = \sqrt{a^2 + в^2} = r$.

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который вычисляется с помощью формул:

$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + в^2}}; \sin\varphi = \dfrac{в}{\sqrt{a^2 + в^2}};$ но $\sqrt{a^2 + в^2} = r$, тогда

$\cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \sin\varphi = \dfrac{в}{r};$ и $a = r\cos\varphi; b = r\sin\varphi$

Подставим получившиеся формулы в $z = a + вi$, получим:

$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$,тогда

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма комплексного числа.

<u>Алгоритм перехода из алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую:</u>

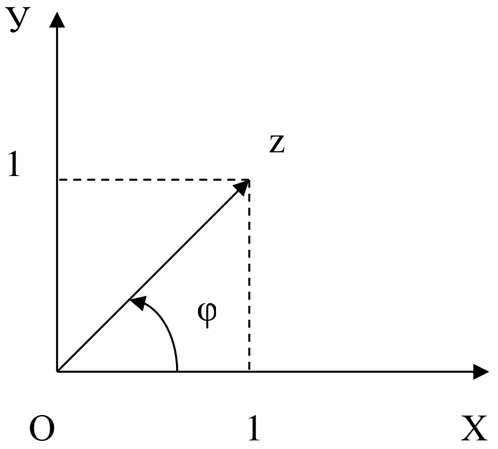
1. Найти: $\sqrt{a^2 + в^2} = r$.
2. Изобразить геометрически число $z = a + вi$, для нахождения четверти числа φ.
3. Составить уравнения: $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \sin\varphi = \dfrac{в}{r};$ и найти φ.
4. Записать z в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

<u>Примеры:</u> а).Перевести числа из алгебраической формы в тригонометрическую.

1). $z = 1 + i$.

1. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2. Изобразим геометрически:



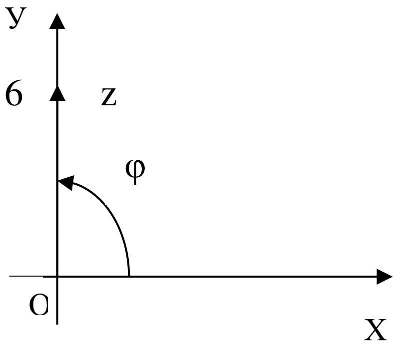
Значит φ принадлежит I четверти.

3. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

4. $z = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$.

2). $z = 6i$.

1. $r = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$.
2. Изобразим геометрически:



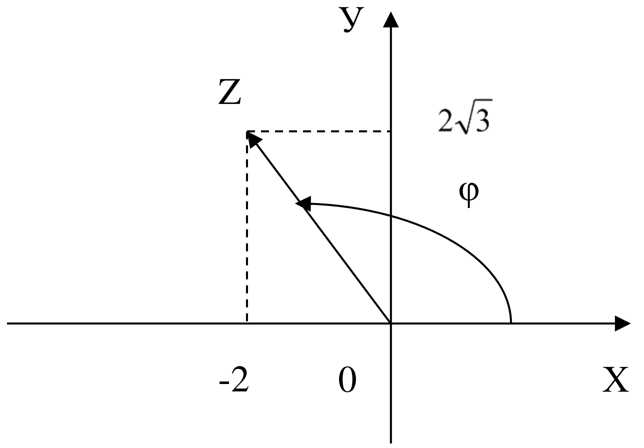
$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, так как z принадлежит положительной полуоси ОУ.

Значит 3 пункт можно опустить.

4. $z = 6(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$.

3). $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

1. $r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$.
2. Изобразим геометрически:



φ принадлежит II четверти.

3. $\cos\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \varphi = (\pi - \arccos\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

4. $z = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

б). перевести из тригонометрической формы в алгебраическую:

1). $z = 8(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Решение:

$$z = 8(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 8(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) = 4\sqrt{3} + 4i.$$

2). $z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

Решение:

$$z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 3(0 + i\cdot(-1)) = -3i.$$

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Пусть даны два числа в тригонометрической форме: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1). При умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2). При делении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

3). При возведении комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в n-ую степень используется формула:

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, которая называется формулой Муавра.

4). Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), k = 0,1,2,...,n-1.$$

<u>Примеры:</u>

Дано: $z_1 = 3(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$, $z_2 = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$.

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\frac{z_1}{z_2}$, 3). z_2^4, 4). $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение: 1).

$$z_1 \cdot z_2 = 3\cdot 2(\cos(330^0 + 60^0) + i\cdot\sin(330^0 + 60^0)) = 6(\cos 390^0 + i\cdot\sin 390^0) =$$
$$= 6(\cos 30^0 + i\sin 30^0) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = 3\sqrt{3} + 3i$$

2).
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}(\cos(330^0 - 60^0) + i\sin(330^0 - 60^0)) = \frac{3}{2}(\cos 270^0 + i\sin 270^0) =$$
$$= \frac{3}{2}(0 + i\cdot(-1)) = -\frac{3}{2}i$$

3).
$$z_2^4 = 2^4(\cos(4\cdot 60^0) + i\sin(4\cdot 60^0)) = 16(\cos 240^0 + i\sin 240^0) = 16(\cos(270^0 - 30^0) +$$
$$+ i\sin(270^0 - 30^0)) = 16(-\sin 30^0 + i(-\cos 30^0)) = 16(-\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = -8 - 8\sqrt{3}i$$

4). $$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}(\cos\frac{330^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{330^0 + 2\pi k}{3})$$

$k = 0;1;2$

$k = 0, \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}(\cos 110^0 + i\sin 110^0)$

$k = 1, \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}(\cos 230^0 + i\sin 230^0)$

$k = 2, \sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}(\cos 350^0 + i\sin 350^0)$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

I-B	II-B
1. Выполнить действия с комплексными числами в алгебраической форме:	
1). $(i+1)(2i-3)$,	1). $(i-2)(5i+1)$,

2). $\dfrac{3i}{4-2i}$, 3). $\dfrac{(7+i)(2-3i)}{2+i}$.

2). $\dfrac{2i}{4+i}$, 3). $\dfrac{(6+i)(4-2i)}{7-i}$.

2. Записать комплексные числа в тригонометрической форме:

1). $z=3i$, 2). $z=1-i$, 3). $z=-\sqrt{3}+i$.

.

1). $z=4i$, 2). $z=-1+i$, 3). $z=\sqrt{3}-i$

3. Выполнить действия с комплексными числами в тригонометрической форме: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $z_1 : z_2$, если:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$
$$z_2 = 0{,}4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

2. Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Понятие комплексного числа и его геометрическая интерпретация.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Понятие сопряженного числа.
4. Модуль комплексного числа.
5. Аргумент комплексного числа.
6. Тригонометрическая форма комплексного числа.
7. Алгоритм перехода из алгебраической формы в тригонометрическую и наоборот.

Практическая работа№2

Тема: **Действия над матрицами. Вычисление определителей II и III порядка.**

Цель: отработать навыки вычисления определителей второго и третьего порядка матрицы различными способами;
закрепить полученные знания по выполнению действий над матрицами;

Краткие теоретические сведения:

- **Матрицы, виды матриц**
- **Операции над матрицами**
- **Определители матрицы. Свойства определителей, их вычисление**

1. Матрицы, виды матриц

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j номер столбца.

Диагональ $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{mn}$ называется главной.

Виды матриц

1. прямоугольная матрица, если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$). Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

2. квадратная матрица, если число строк матрицы равно числу столбцов ($m = n$). Например,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3. диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой отличны от нуля элементы, находящиеся на главной диагонали. Например,

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

4. единичная матрица – это матрица квадратная, диагональная, у которой все числа главной диагонали равны 1. Например,

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. нулевая матрица – это матрица, все элементы которой равны нулю. Например,

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. если в матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

   переставить строки со столбцами, то получим транспонированную матрицу

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

7. матрица-строка – это матрица, которая содержит 1 строку и n столбцов. Например,

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

8. матрица-столбец – это матрица, которая содержит m строк и 1 столбец. Например,

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

2. Операции над матрицами

<u>Суммой</u> матриц A и B будем называть такую матриц, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковые строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные $n \times n$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Примеры:

1) Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

   Найти: $A+B$.
   Решение:
   $$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+5 \\ 0+4 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

2) Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \\ 9 & -7 & -3 \end{pmatrix}$

   Найти: $A+B$.
   Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \\ 9 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & (-1)+4 & 4+2 \\ 1+7 & 0+2 & 5+6 \\ 3+9 & 1+(-7) & (-1)+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 11 \\ 12 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Разность</u> матриц выполняется аналогично, т.е. в результате вычитания двух матриц получается матрица элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц.

Пример:

Дано: $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Найти: $A–B$.

Решение:

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 & 10-(-1) \\ 1-4 & 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Произведение матрицы *A* на число *k*</u> называется такая матрица, каждый элемент которой равен $k \cdot a_{ij}$.

Пример:

1) Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Найти: $3 \cdot A$.

Решение: Умножая каждый элемент матрицы *A* на 3, получим

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 9 & 15 & 3 \\ 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

2) Дано: $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Найти: $2 \cdot A–B$.

Решение: Найдем сначала $2 \cdot A$

$2A = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$. Затем найдем

$$2A - B = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2 & 10-(-1) \\ 10-4 & 4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Определение: Произведением матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ называется матрица $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$

Итак, чтобы найти первый элемент новой матрицы c_{11},который расположен в первой строке и первом столбце, надо каждый элемент первой строки матрицы *A* (т.е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы *B* (т.е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить:

$$a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$

Далее, чтобы найти элемент c_{12}, расположенный в первой строке второго столбца, надо умножить все элементы первой строки матрицы *A* (т.е. a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца матрицы *B* (т.е. b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить:

$$a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$ и т.д.

Пример:

Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

Найти: $A \cdot B$.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 \\ 5 \cdot 6 + 1 \cdot 7 & 5 \cdot 4 + 1 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 35 \\ 37 & 29 \end{pmatrix}$$

Правило умножения матриц распространяется на умножение прямоугольных матриц.

Справедливы следующие правила:

1) умножение матрицы *A* на матрицу *B* имеет смысл только тогда, когда число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*.
2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получится матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Пример:

Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти: $A \cdot B$.

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 + 4 - 3 & 6 + 0 + 1 \\ 0 + 2 - 6 & 0 + 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матриц:

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(A+B)·C = A·C+B·C

3. Определители матрицы. Свойства определителей, их вычисление

Пусть дана квадратная матрица второго порядка: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. Обозначается

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

(определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей.)

Пример:

1) Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$

   Решение:

   $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=2\cdot(-4)-5\cdot(-3)=-8+15=7$

2) Упростить выражение $\begin{vmatrix} a^2 & a\cdot b \\ a\cdot b & b^2 \end{vmatrix}$

   Решение:

   $\begin{vmatrix} a^2 & a\cdot b \\ a\cdot b & b^2 \end{vmatrix}=a^2\cdot b^2-a\cdot b\cdot a\cdot b=a^2\cdot b^2-a^2\cdot b^2=0$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим данной матрице, называется число

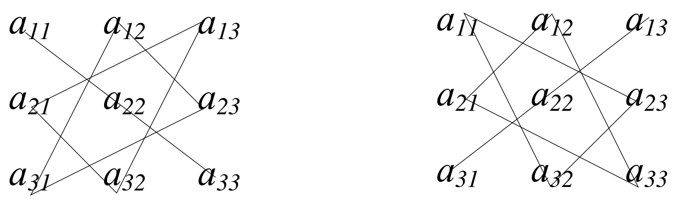
$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$$

Определитель третьего порядка записывается так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников (правилом Сарруса). Это правило можно проиллюстрировать на схеме:



Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали ($a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$ и $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$). Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ и $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$)

Пример:

Вычислить $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 4 =$$

$$= 45 + 18 + 8 - 15 - 12 - 36 = 71 - 63 = 8$$

<u>Свойства определителей</u>

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами (т.е. транспонировать)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-2) \cdot 5 = 22$$

2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 5\cdot 2 = 4 - 10 = -6,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot 1 = 10 - 4 = 6$$

3. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{12} \\ a_{21} & k\cdot a_{22} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot(3\cdot 3 - 1\cdot 7) = -2\cdot(9-7) = -4$$

4. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 4 - 3\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$= 4 + 6 - 3 - 6 - 4 + 3 = 0$$

5. Если все элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю

Пример:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 6 - 2\cdot 12 = 24 - 24 = 0$$

6. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, – нули, равен произведению элементов главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием i-строки и j-столбца.

Например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

получается, если вычеркнуть из определителя первую строку и второй столбец, т.е.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пример:

Дано: $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

Найти: M_{21}, M_{32}.

Решение:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 2 = 18 - 0 = 18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = 20 - 0 = 20$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Тогда

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Пример:

Дано: $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

Найти: алгебраические дополнения A_{12}, A_{23}, A_{33}.

Решение:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 \cdot 7 - 3 \cdot 5) = -1 \cdot (-15) = 15,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -1 \cdot (12 - 20) = -1 \cdot (-8) = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0) = 1 \cdot (-2 - 0) = 1 \cdot (-2) = 2$$

Утверждение: Определитель можно вычислить с помощью алгебраических дополнений, умноженных на соответствующий элемент одной строки или одного столбца.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1\cdot(-3)-(-2)\cdot 4) - 5\cdot(7\cdot(-3)-1\cdot 4) +$$

$$+2\cdot(7\cdot(-2)-1\cdot(-1)) = 3\cdot 11 - 5\cdot(-25) + 2\cdot(-13) = 33+125-26 = 132$$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

Вариант 1.

1). Дано: $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $3A + 2B$.

2). Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{N} = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$. Найти $2A + 3B - C$.

3). Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

4). Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

5). Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

6). Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

7). Вычислить $C = A^2 + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

8). Найти $AB - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9). Найти $3A \cdot 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

10). Найти AE, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11). Найти: EA, если $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

12). Вычислить определители:

а). $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}$, в). $\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$, б). $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$,

г). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, д). $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Вариант 2.

1). Дано: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $2A + 3B$.

2). Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \tilde{N} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти $3A + 2B - C$.

3). Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

4). Дано: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

5). Дано: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

6). Дано: $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$.

7). Вычислить $C=A^2-2B$, где $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-8 & 5\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

8). Найти $AB-BA$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

9). Найти $3A\cdot 2B$, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

10). Найти AE, где $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

11). Найти: EA, если $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\\ -6 & 8\end{pmatrix}$.

12). Вычислить определители:

а). $\begin{vmatrix}5 & 8\\ -2 & 6\end{vmatrix}$, б). $\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 10\end{vmatrix}$, в). $\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 3\\ 8 & 1 & 5\end{vmatrix}$,

г). $\begin{vmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 4\end{vmatrix}$, д). $\begin{vmatrix}8 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 6\\ -3 & -1 & 0\end{vmatrix}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Сформулируйте определение матрицы.
2. Приведите основные виды матриц.
3. Дайте понятие определителя матрицы.
4. Объясните, как выполняются действия над матрицами.
5. Какой способ вычисления определителей вы применяли?
6. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№3

Тема: **Решение систем линейных уравнений матричным способом.**

Цель: отработать навыки решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными матричным способом;
повторить нахождение обратной матрицы;

Краткие теоретические сведения:

- **Обратная матрица, вычисление обратных матриц второго и третьего порядков**
- **Решение систем линейных уравнений в матричной форме**

1. **Обратная матрица, вычисление обратных матриц второго и третьего порядков**

Квадратная матрица A называется <u>вырожденной</u>, если ее определитель равен нулю, и <u>невырожденной</u>, если ее определитель не равен нулю.

Если A – квадратная матрица, то обратной по отношению к А называется матрица, которая, будучи умноженной на A (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

Обозначив обратную матрицу через A^{-1}, запишем

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица A называется обратимой.

Нахождение обратной матрицы имеет большое значение при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

Теорема. Для того, чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица А было невырожденной, т.е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

При условии $D = |A| \neq 0$ обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

Схема нахождения обратной матрицы:

1. Находят определитель D матрицы A.
2. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Транспонируют полученную матрицу (т.е. меняют, местами строки со столбцами)

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Умножают полученную матрицу на число $\frac{1}{D}$

Пример 1:

Дано: матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Найти: обратную матрицу A^{-1}.

Решение: A^{-1} (обратную матрицу) найдем по схеме

1. $D = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10$

Т.к. $D \neq 0$, то данная матрица является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица

2. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 3 = 3$,

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 4 = -4$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1,$
$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Транспонируем эту матрицу, получим

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Умножив полученную матрицу на число $\frac{1}{D}$, т.е. на $\frac{1}{10}$, получим

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Можно выполнить проверку и убедиться, что $A \cdot A^{-1} = E$

Пример 2:

Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Найти: матрицу, обратную данной.

Решение:

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 0 =$

$= -7 + 12 + 9 = 14$

Т.к. $D \neq 0$, матрица A невырожденная и, значит, можно найти A^{-1}.

2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7,$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6,$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14,$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2,$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6,$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\-1&2\end{vmatrix}=7,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}=-1$$

Запишем новую матрицу $\begin{pmatrix}-7&6&3\\-14&-2&6\\7&-2&-1\end{pmatrix}$

3. Транспонируем полученную матрицу: $\begin{pmatrix}-7&-14&7\\6&-2&-2\\3&6&-1\end{pmatrix}$

4. Умножим полученную матрицу на $\dfrac{1}{D}=\dfrac{1}{10}$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}-7&-14&7\\6&-2&-2\\3&6&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-7}{14}&\frac{-14}{14}&\frac{7}{14}\\\frac{6}{14}&\frac{-2}{14}&\frac{-2}{14}\\\frac{3}{14}&\frac{6}{14}&\frac{-1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}\\\frac{3}{14}&\frac{3}{7}&-\frac{1}{14}\end{pmatrix}$$

2. Решение систем линейных уравнений в матричной форме

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases}a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3=b_1\\a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3=b_2\\a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+a_{33}\cdot x_3=b_3\end{cases}$$

Если обозначить матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

свободные члены и неизвестные записать в виде матриц-столбцов

$$B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\qquad\text{и}\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

тогда, используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \quad A \cdot X = B$$

Это равенство называется <u>простейшим матричным уравнением</u>.

Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A невырожденная ($D \neq 0$), тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив на нее обе части матричного уравнения, имеем

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Используя сочетательный закон умножения, получим

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Но так как $\quad A^{-1} \cdot A = E \quad$ и $\quad E \cdot X = X,$

получим

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Т.к. систему линейных уравнений можно записать в виде матричного уравнения, то эту систему можно решить как матричное уравнение.

<u>Пример 1:</u>

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases},$$

Решить данную систему матричным способом.

<u>Решение:</u>

1). Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-3+2)+6-1+2(4-1)=8 \neq 0.$$

Значит матрица невырожденная и для неё существует обратная.

2). Запишем систему уравнений в матричном виде: AX=B.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3). Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} и обратную матрицу A^{-1} по формулам:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ и $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} * A^{\upsilon}$, где M_{ij}-определитель (минор), полученный путем вычеркивания i-той строки и j-того столбца из главного определителя, а

$A^{\upsilon}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ - присоеденная матрица, полученная из алгебраических дополнений, путем транспонирования.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-3+2=-1$; $A_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-(3+4)=-7$; $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$ $=-1-2=-3$;

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6+1=-5$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-9-2=-11$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-(3+4)=-7$;

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-(-6+1)=5$; $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3-2=1$;

$A^{-1}=\frac{1}{8}*\begin{pmatrix} -1 & -7 & -3 \\ -5 & -11 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

3).Воспользуемся формулой $X=A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}*\begin{pmatrix} -1 & -7 & -3 \\ -5 & -11 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$x_1=\frac{1}{8}*(-1*11-7*(-6)-3*5)=2$,

$x_2=\frac{1}{8}*(-5*11-11*(-6)-7*5)=-3$,

$x_3=\frac{1}{8}*(3*11+5*(-6)+1*5)=1$,

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=1$.

Пример 2:

Решить систему уравнений в матричной форме

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 = 10 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 = 23 \\ x_2 + 2\cdot x_3 = 13 \end{cases}$$

Решение. Составим матричное уравнение $A\cdot X = B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$$

и найдем X по формуле $X = A^{-1}\cdot B$

Для этого необходимо выполнить действия:

1. Найти A^{-1}
2. Найти произведение $A^{-1}\cdot B$

1) Чтобы найти A^{-1}, надо выполнить четыре действия:

а) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$

б) $A_{11} = 3$, $A_{12} = -6$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = -4$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = -4$

составим матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

в) транспонируем ее, получим $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

г) умножим на $\dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{-9}$. Получим $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

2) Найдем $X = A^{-1}\cdot B$

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Итак, решение системы уравнений есть $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$

Ответ: (4; 3; 5)

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание:

Решите системы уравнений матричным способом.

Вариант 1.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 12 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -13 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -10 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$.

Вариант 2.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 16 \\ -2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 13 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -11 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$.

Вариант 3.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -8 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 7 \end{cases}$.

Вариант 4.

1. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -5 \\ x_1 - 5x_2 + 12x_3 = -11 \end{cases}$.

Вариант 5.

1. $\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение обратной матрицы.
2. Приведите условия существования обратной матрицы для данной.
3. Дайте понятие вырожденной и невырожденной матрицы.
4. Объясните, как применяется обратная матрица для решения систем уравнений.
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№4

Тема: **Решения систем трех уравнений с тремя неизвестными с помощью формул Крамера.**

Цель: отработать навыки решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными с помощью формул Крамера;

Краткие теоретические сведения:

Теорема. Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.

Пусть дана система n линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A, из свободных членов – матрицу B, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы А обозначим Δ и назовем определителем системы. Таким образом,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пусть $\Delta \neq 0$. Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при x_1, x_2,…x_n на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных)

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

……………………………………

$$\Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными запишутся так:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ \dots \quad x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Рассмотрим случай, когда определитель системы равен нулю. Здесь возможны два варианта:

1) $\Delta = 0$ и каждый определитель Δ_{x_i} равен нулю. Это возможно только тогда. когда коэффициенты при неизвестных x_i пропорциональны. Тогда система имеет бесчисленное множество решений.
2) $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i} \neq 0$. Это возможно только тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме x_i, пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая не имеет решений.

Примеры:

1) Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 3y = 12 \\ 2 \cdot x - y = 7 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-1) - 3 \cdot 7 = -33$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 12 \cdot 2 = 11$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1$$

Ответ: (3; –1)

2) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot x - 2y = 5 \\ 6 \cdot x - 4 \cdot y = 11 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{vmatrix} = 2 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1$$

Т.к. $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, то система не имеет решений

Ответ: решений нет.

3) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot x - 3y = 11 \\ 6 \cdot x - 9 \cdot y = 33 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 33 & -9 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 33 \end{vmatrix} = 0$$

Коэффициенты при неизвестных пропорциональны, данная система имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: бесчисленное множество решений.

Пусть дана система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases},$$

Выпишем главный определитель системы, состоящий из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Заменим в главном определителе 1-ый столбец на столбец свободных чисел, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Заменим в главном определителе 2-ой столбец на столбец свободных чисел, получим:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{23} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Заменим в главном определителе 3-ий столбец на столбец свободных чисел, получим:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Эти формулы называются формулами Крамера.

Пример:

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

Решить данную систему с помощью формул Крамера.

Решение:

1). Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-3+2)+6-1+2(4-1)=8 \neq 0.$$

2). Заменим в главном определителе 1-ый столбец на столбец свободных чисел, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 11*(-1)+13+2*7=16,$$

3). Заменим в главном определителе 2-ой столбец на столбец свободных чисел, получим:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3*13-11*5+2*(-4)=-24,$$

4). Заменим в главном определителе 3-ий столбец на столбец свободных чисел, получим:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 11 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 11\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3*(-7)+(-4)+11*3=8,$$

5). Применим формулы Крамера:

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$, тогда: $x_1=\frac{16}{8}=2$, $x_2=-\frac{24}{8}=-3$, $x_3=\frac{8}{8}=1$.

Ответ: (2; -3; 1).

4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot x + 2 \cdot y + z = 3 \\ 5 \cdot x - 2 \cdot y - 2 \cdot z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=25 \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=25$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 5 & 3 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-25 \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 5 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=50$$

Тогда $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{25}{25}=1$ $\qquad y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-25}{25}=-1$ $\qquad z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{50}{25}=2$

Ответ: (1; –1; 2).

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание:

Решите системы уравнений с помощью формул Крамера.

Вариант 1.

1. $\begin{cases}2x_1+3x_2-2x_3=4\\ x_1-2x_2+7x_3=12\\ -3x_1+3x_2-3x_3=6\end{cases}$, 2. $\begin{cases}3x_1-7x_2+9x_3=-13\\ -x_1+3x_2-2x_3=5\\ x_1-4x_2+3x_3=-6\end{cases}$, 3. $\begin{cases}2x_1+4x_2-2x_3=8\\ -2x_1+5x_2+9x_3=-10\\ x_1-2x_2+6x_3=15\end{cases}$.

Вариант 2.

1. $\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=-1\\ 2x_1+3x_2-4x_3=1\\ -x_1-2x_2+3x_3=-1\end{cases}$, 2. $\begin{cases}2x_1-3x_2+2x_3=2\\ x_1+5x_2-4x_3=16\\ -2x_1+3x_2-7x_3=13\end{cases}$, 3. $\begin{cases}-3x_1-2x_2+x_3=9\\ x_1-5x_2+7x_3=-11\\ 2x_1+3x_2-2x_3=-2\end{cases}$.

Вариант 3.

1. $\begin{cases}3x_1+7x_2-2x_3=-5\\ -x_1-2x_2+3x_3=2\\ x_1-9x_2-3x_3=-13\end{cases}$, 2. $\begin{cases}-5x_1+7x_2-3x_3=-8\\ x_1-4x_2+2x_3=-5\\ 2x_1+3x_2+9x_3=7\end{cases}$, 3. $\begin{cases}2x_1+3x_2+5x_3=-4\\ x_1+5x_2+3x_3=-1\\ -3x_1+2x_2-7x_3=7\end{cases}$.

Вариант 4.

1. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -5 \\ x_1 - 5x_2 + 12x_3 = -11 \end{cases}$.

Вариант 5.

1. $\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение определителя матрицы.
2. Введите определение формул Крамера.
3. Какими способами вычисления определителей вы пользовались?
4. Объясните, как применяются формулы Крамера?
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№5.

Тема: **Решения систем трех уравнений с тремя неизвестными с помощью метода Гаусса.**

Цель: отработать навыки решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными с помощью метода Гаусса;

Краткие теоретические сведения:

Пусть дана система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases}.$$

Выпишем матрицу А, состоящую из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

К матрице $A = (a_{ij})_{3x3}$ справа допишем столбец из свободных чисел $в_1, в_2, в_3$, получим новую матрицу, которая называется расширенной и обозначается:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & в_3 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса – это метод последовательного исключения неизвестных. Он состоит в следующем:

1. систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом.
2. из полученной треугольной системы переменных находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход)

Элементарные преобразования расширенной матрицы соответствуют эквивалентным преобразованиям системы уравнений.

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1) умножение или деление коэффициентов свободных членов на одно и то же число,
2) сложение и вычитание уравнений,
3) перестановку уравнений системы,
4) исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

Пример 1:

Решить систему уравнений с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Сложим первую и вторую строки:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Первую строку умножим на 2 и сложим с третьей:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычтем третью:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

Мы привели расширенную матрицу к треугольному виду, перейдем к системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_3 = -4 \end{cases}.$$

Откуда: $x_3 = 2, x_2 = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{2}{3}$

Пример 2:

Используя метод Гаусса, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 \cdot x + 2 \cdot y - \quad z = 4 \\ 2 \cdot x - \quad y + 3 \cdot z = 9 \\ \quad x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = 13 \end{cases}$$

Решение. Переставим третье уравнение на место первого:

$$\begin{cases} \quad x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = 13 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y - \quad z = 4 \\ 2 \cdot x - \quad y + 3 \cdot z = 9 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$

В следующей матрице первую строку оставим неизменной, а вторую и третью строки получим в результате умножения первой строки на 3, а затем на 2 и вычитанием поочередно первой и второй, а затем первой и третьей строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Разделим вторую строку на 8 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$

Домножим вторую строку на 3 и из нее вычтем третью строку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{8} & -\frac{39}{8} \end{array}\right)$$

Получили треугольную матрицу. Прямой ход выполнили.

Обратный ход: последнюю строку матрицы запишем в виде уравнения.

Получим:

$$-\frac{13}{8} z = -\frac{39}{8},$$

$$z = 3$$

Предпоследнюю строку матрицы запишем в виде

$$y-\frac{7}{8}z=-\frac{5}{8}$$

и подставим вместо z найденной значение 3

$$y-\frac{7}{8}\cdot 3=-\frac{5}{8},$$
$$y=\frac{21}{8}-\frac{5}{8},$$
$$y=\frac{16}{8}=2$$

И далее, из первого уравнения получим

$$x-2\cdot y+2\cdot z=3,$$
$$x-2\cdot 2+2\cdot 3=3,$$
$$x-4+6=3,$$
$$x=4-6+3,$$
$$x=1$$

Итак, получили $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

Ответ: (1; 2; 3)

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание:

Решите системы уравнений с помощью метода Гаусса.

Вариант 1.

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3=4 \\ x_1-2x_2+7x_3=12 \\ -3x_1+3x_2-3x_3=6 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 3x_1-7x_2+9x_3=-13 \\ -x_1+3x_2-2x_3=5 \\ x_1-4x_2+3x_3=-6 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=8 \\ -2x_1+5x_2+9x_3=-10 \\ x_1-2x_2+6x_3=15 \end{cases}$.

Вариант 2.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=-1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=1 \\ -x_1-2x_2+3x_3=-1 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=2 \\ x_1+5x_2-4x_3=16 \\ -2x_1+3x_2-7x_3=13 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -3x_1-2x_2+x_3=9 \\ x_1-5x_2+7x_3=-11 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=-2 \end{cases}$.

Вариант 3.

1. $\begin{cases} 3x_1+7x_2-2x_3=-5 \\ -x_1-2x_2+3x_3=2 \\ x_1-9x_2-3x_3=-13 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} -5x_1+7x_2-3x_3=-8 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \\ 2x_1+3x_2+9x_3=7 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=-4 \\ x_1+5x_2+3x_3=-1 \\ -3x_1+2x_2-7x_3=7 \end{cases}$.

Вариант 4.

1. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -5 \\ x_1 - 5x_2 + 12x_3 = -11 \end{cases}$.

Вариант 5.

1. $\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -9 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -13 \end{cases}$, 2. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$, 3. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение системы уравнений.
2. Введите определение расширенной матрицы системы.
3. Виды эквивалентных преобразований.
4. Определение прямого и обратного хода.
5. Объясните, как применяется метод Гаусса?
6. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№6.

Тема: **Вычисление производных сложной функции.**

Цель: отработать навык нахождения производных сложных функций;

Краткие теоретические сведения:

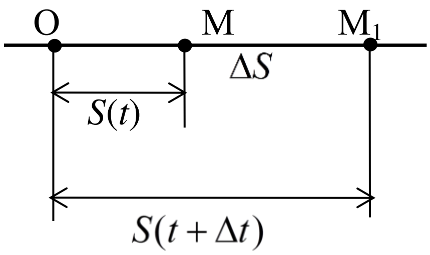
- **Понятие производной функции**
- **Производная суммы, разности, произведения и частного функций**
- **Производные элементарных функций**
- **Производная сложной функции**
- **Производные высших порядков**

1. Понятие производной функции

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Ее решение приводи к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Пусть материальная точка *M* движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени *t* соответствует определенное расстояние *OM* = *S* до некоторой фиксированной точки О. Это расстояние зависит от истекшего времени t, т.е. $S = S(t)$.

Это равенство называют законом движения точки. Требуется найти скорость движения точки.



Если в некоторый момент времени t точка занимает положение M, то в момент времени $t + \Delta t$ (Δt – приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$ (ΔS – приращение расстояния).

Таким образом, перемещение точки М за время Δt будет

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает <u>среднюю скорость</u> движения точки за время Δt:

$$v_{ñð} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения токи в данный момент времени t .

Предел средней скорости движения при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной скоростью движения

$$v_{ìãí} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Этот предел называют производной функции $S(t)$ и обозначают:

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Определение: Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - S(x_0)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется <u>дифференцируемой</u> в этом интервале; операция нахождения производной функции называется <u>дифференцированием</u>.

Пример: Найти производную функции $y = x^2$

Решение:

1) Аргументу x даем приращение Δx;

2) Находим Δy:

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^2 - x^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2 - x^2 = 2 \cdot x \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$

3) Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot x \cdot \Delta x + \left(\Delta x\right)^2}{\Delta x} = 2 \cdot x + \Delta x$$

4) Находим предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2 \cdot x + \Delta x\right) = 2 \cdot x$$

Итак, $\left(x^2\right)' = 2 \cdot x$

2. Производная суммы, разности, произведения и частного функций

Нахождение производной функции непосредственно по определению (т.е. с помощью теории пределов) связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ две дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции.

Теорема 1. Производная суммы (разности) двух функции равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Теорема 2. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v \pm u \cdot v'$$

Теорема 3. Производная частного двух функций $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, если $v(x) \neq 0$ равна дроби, числитель которой есть разность произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v \pm u \cdot v'}{v^2}$$

3. Производные элементарных функций (см. приложение 1)

Примеры

1) Найти производную функции

$$y = x^5 + 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x + 1$$

Решение:

$$y' = \left(x^5 + 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x + 1\right)' = \left(x^5\right)' + \left(2 \cdot x^3\right)' - \left(6 \cdot x\right)' + \left(1\right)' =$$
$$= 5 \cdot x^4 + 2 \cdot \left(x^3\right)' - 6 \cdot \left(x\right)' + 0 = 5 \cdot x^4 + 6 \cdot x^2 - 6$$

2) Найти производную функции

$$\boldsymbol{y = x \cdot \sin x}$$

Решение: воспользуемся формулой $(u \cdot v)' = u' \cdot v \pm u \cdot v'$. Получим

$$y' = \left(x \cdot \sin x\right)' = \left(x\right)' \cdot \sin x + x \cdot \left(\sin x\right)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x =$$
$$= \sin x + \cos x$$

3) Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Решение: воспользуемся формулой $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v \pm u \cdot v'}{v^2}$. Получим

$$y' = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 - 1\right)' \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$
$$= \frac{\left(\left(x^2\right)' - \left(1\right)'\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(\left(x^2\right)' + \left(1\right)'\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$
$$= \frac{\left(2 \cdot x - 0\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(2 \cdot x + 0\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$
$$= \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right) \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$
$$\frac{2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4 \cdot x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

4. Производная сложной функции (см. приложение 2)

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций.

Определение: Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ сложная функция с промежуточным аргументом *u* и независимым аргументом *x*.

Производная сложной функции вычисляется по формуле

$$y' = f'(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Пример: Найти производную функции

$$y = \sqrt{\cos x}$$

Решение: Воспользуемся формулой $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$$y' = \left(\sqrt{\cos x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

Примеры

1) Вычислить производную функции

$$y = e^{\operatorname{arctg} x}$$

Решение: Воспользуемся формулой $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

$$y' = \left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

2) Вычислить производную функции

$$y = \operatorname{tg}^5\left(x^2 - 1\right)$$

Решение: Запишем данную функцию в виде:

$$y = \operatorname{tg}^5\left(x^2 - 1\right) = \left(\operatorname{tg}\left(x^2 - 1\right)\right)^5$$

и воспользуемся формулой $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

Получим

$$y' = \left(\left(\operatorname{tg}\left(x^2-1\right)\right)^5\right)' = 5 \cdot \left(\operatorname{tg}\left(x^2-1\right)\right)^4 \cdot \left(\operatorname{tg}\left(x^2-1\right)\right)' =$$

далее применим формулу $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$$= 5 \cdot \operatorname{tg}^4\left(x^2-1\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2-1\right)} \cdot \left(x^2-1\right)' = 5 \cdot \operatorname{tg}^4\left(x^2-1\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2-1\right)} \cdot 2 \cdot x =$$
$$= \frac{10 \cdot x \cdot \operatorname{tg}^4\left(x^2-1\right)}{\cos^2\left(x^2-1\right)}$$

3) Найти производную функции $y = \ln(\sin x)$

Решение: Применим формулу $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$. Получим

$$y' = \left(\ln(\sin x)\right)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \left(\sin x\right)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

5. Производные высших порядков

Функция $f'(x)$ называется производной первого порядка.

Производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$.

Производная от второй производной есть производная третьего порядка $f'''(x)$ и т.д.

Производная n-го порядка есть производная от производной $(n-1)$-го порядка,

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Производные высших порядков находят широкое применение в физике. Так, например, вторая производная от пути есть ускорение движущейся точки.

Пример: Найти производную третьего порядка для функции

$$y = \sin x + \sqrt{5 \cdot x^2}$$

Решение:

$$y' = \left(\sin x + \sqrt{5\cdot x^2}\right)' = (\sin x)' + \left(\sqrt{5\cdot x^2}\right)' = \cos x + \frac{1}{2\cdot\sqrt{5\cdot x^2}}\cdot\left(5\cdot x^2\right)' =$$

$$= \cos x + \frac{10\cdot x}{2\cdot\sqrt{5\cdot x^2}} = \cos x + \frac{5\cdot x}{\sqrt{5\cdot x^2}}$$

$$y'' = \left(\cos x + \frac{5\cdot x}{\sqrt{5\cdot x^2}}\right)' = (\cos x)' + \left(\frac{5\cdot x}{\sqrt{5\cdot x^2}}\right)' =$$

$$= -\sin x + \frac{(5\cdot x)'\cdot\sqrt{5\cdot x^2} - 5\cdot x\cdot\left(\sqrt{5\cdot x^2}\right)'}{5\cdot x^2} =$$

$$= -\sin x + \frac{5\cdot\sqrt{5\cdot x^2} - 5\cdot x\cdot\frac{10\cdot x}{2\cdot\sqrt{5\cdot x^2}}}{5\cdot x^2} = -\sin x + \frac{\sqrt{5\cdot x^2} - \frac{5\cdot x^2}{\sqrt{5\cdot x^2}}}{5\cdot x^2} = -\sin x$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x$$

1). Рассмотрим вычисление производных на примере.

Пример 1:

Дано: $f(x) = 5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 3tgx - 3ctgx + 2\log_2 x + 3\ln x$

Найти: $f'(x)$

Решение:

$$f'(x) = \left(5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2tgx - 3ctgx + 2\log_2 x + 3\ln x\right)' = (5)' + \left(x^3\right)' + 3\left(x^2\right)' +$$
$$+ (\sin x)' + (\cos x)' + 2(tgx)' - 3(ctgx)' + 2(\log_2 x)' + 3(\ln x)' = 3x^2 + 6x + \cos x - \sin x +$$
$$+ \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{2}{x\ln 2} + \frac{3}{x}$$

Пример 2:

Дано: $f(x) = 5^x + \arcsin x + 3\arccos x + arctgx - 3arcatgx$

Найти: $f'(x)$

Решение:

$$f'(x)=\left(5^x+arcsin\,x+3\,arccos\,x+arctgx-3arcctgx\right)'=\left(5^x\right)'+\left(arcsin\,x\right)'+3\left(arccos\,x\right)'+$$
$$+\left(arctgx\right)'-3\left(arcctgx\right)'=5^x\ln 5+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{3}{1+x^2}=$$
$$=5^x\ln 5-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{1-x^2}$$

Пример 3:

Дано: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4}$

Найти: $f'(x)$

Решение:

Применим формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^4}\right)'=\frac{\left(x^2-1\right)'x^4-\left(x^2-1\right)\left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2}=\frac{(2x-0)x^4-\left(x^2-1\right)\cdot 4x^3}{x^8}=$$

Получим $=\dfrac{2x\cdot x^4-4x^3\left(x^2-1\right)}{x^8}=\dfrac{2x^5-4x^5+4x^3}{x^8}=\dfrac{-2x^5+4x^3}{x^8}=\dfrac{-2x^3\left(x^2-2\right)}{x^8}=\dfrac{-2\left(x^2-2\right)}{x^5}=$

$$=\frac{2\left(2-x^2\right)}{x^5}$$

Пример 4:

Дано: $y(x)=x^7\cdot sinx$

Найти: $f'(x)$

Решение:

Применим формулу $(u\cdot v)'=u'v+uv'$

Получим

$$y'(x)=\left(x^7\cdot sinx\right)'=\left(x^7\right)'sinx+x^7\left(sinx\right)'=7x^6\,sinx+x^7\,cosx$$

Пример 5:

Дано: $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

Найти: $y'(x)$

Решение:

Применим формулы: $\sqrt[m]{a^n}=\alpha^{\frac{n}{m}}$; $\dfrac{1}{\alpha^n}=\alpha^{-n}$; $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$

Получим

$$y'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}\right)'=\left(x^{-\frac{2}{5}}\right)'=-\frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1}=-\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}=$$

$$=-\frac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}=-\frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}}$$

2). Найти производные следующих сложных функций:

Пример № 1:

$f(x)=sin3x$

Применим формулы $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, затем $(sinu)'=cosu\cdot u'$

$f'(x)=(sin3x)'=cos3x\cdot(3x)'=3cos3x$

Пример № 2:

$f(x)=sin(x^2+5x+2)$

Применим формулу $(sinu)'=cosu\cdot u'$

$f'(x)=(sin(x^2+5x+2))=cos(x^2+5x+2)\cdot(x^2+5x+2)'=(2x+5)\cdot cos(x^2+5x+2)$

Пример № 3:

$f(x)=cos^{100}x$

Применим формулы $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, затем $(cosx)'=-sinx$

$$f'(x)=(cos^{100}x)'=((cosx)^{100})'=100\cdot(cosx)^{99}(cosx)'=100cos^{99}x(-sinx)=-100sinx\cdot cos^{99}x$$

Пример № 4:

$f(x)=ln(x^2+2x)$

Применим формулу $(lnu)'=\frac{1}{u}\cdot u'$

$$f'(x)=(ln(x^2+2x))'=\frac{1}{x^2+2x}\cdot(x^2+2x)'=\frac{1}{x^2+2x}\cdot(2x+2)=\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$$

Пример № 5:

$f(x)=tg^5x$

Применим формулу $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, затем $(tgx)'=\frac{1}{cos^2x}$

$$f'(x)=(tg^5x)'=((tgx)^5)'=5(tgx)^4\cdot(tgx)'=5tg^4x\cdot\frac{1}{cos^2x}=\frac{5tg^4x}{cos^2x}$$

Пример № 6:

$f(x) = \ell^{tgx}$

Применим формулы: $\left(e^{n}\right)' = e^{n} \cdot u'$, затем $(tgx)' = \dfrac{1}{cos^{2} x}$

$$f'(x) = \left(\ell^{tgx}\right)' = \ell^{tgx} \cdot (tgx)' = \ell^{tgx} \cdot \frac{1}{cos^{2} x} = \frac{\ell^{tgx}}{cos^{2} x}$$

Пример № 7:

$f(x) = 2^{3x} + x^{5} + \ell^{-x^{2}}$

Применим формулы: $(u + v + w)' = u' + v' + w'$, затем $\left(a^{n}\right)' = \alpha^{n} \cdot lna \cdot u'$,

$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$

$$f'(x) = \left(2^{3x} + x^{5} + \ell^{-x^{2}}\right)' = (2^{3x})' + (x^{5})' + (\ell^{-x^{2}})' = 2^{3x} \cdot ln2(3x)' + 5x^{4} + \ell^{-x^{2}} \cdot (-x^{2})' =$$
$$= 3 \cdot 2^{3x} \cdot ln2 + 5x^{4} - 2x \cdot \ell^{-x^{2}}$$

Пример № 8:

$f(x) = x^{2} \cdot \ell^{-x}$

Применим формулы: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$

$$f'(x) = \left(x^{2} \cdot \ell^{-x}\right)' = \left(x^{2}\right)' \cdot \ell^{-x} + x^{2} \cdot \left(\ell^{-x}\right)' = 2x\ell^{-x} + x^{2}\ell^{-x} \cdot (-x)' =$$
$$= 2x\ell^{-x} - x^{2}\ell^{-x} = x \cdot \ell^{-x} \cdot (2 - x)$$

Пример № 9:

$f(x) = lntg5x$

Применим формулы: $(lnu)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$, $(tgx)' = \dfrac{1}{cos^{2} x}$

$$f'(x) = (lntg5x)' = \frac{1}{tg5x}(tg5x)' = \frac{1}{tg5x} \cdot \frac{1}{cos^{2} 5x} \cdot (5x)' = \frac{1}{tg5x} \cdot \frac{1}{cos^{2} 5x} \cdot 5 = \frac{5}{tg5x \cdot cos^{2} 5x} =$$
$$\frac{5}{\frac{sin5x}{cos5x} \cdot cos^{2} 5x} = \frac{5}{sin5x \cdot cos5x} = \frac{5 \cdot 2}{2sin5x \cdot cos5x} = \frac{10}{sin10x}$$

Пример № 10:

$f(x) = sin\left(2^{x}\right)$

Применим формулы: $(sinu)' = cosu \cdot u'$, $(a^x)' = \alpha^x \cdot lna$

$$f'(x) = \left(sin\left(2^x\right)\right)' = cos\left(2^x\right) \cdot \left(2^x\right)' = cos\left(2^x\right) \cdot 2^x \cdot ln2 = 2^x \cdot ln2 \cdot cos\left(2^x\right)$$

Пример № 11:

$f(x) = sin^2 x^3$

Применим формулы: $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, $(sinu)' = cosu \cdot u'$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$f'(x) = \left(sin^2 x^3\right)' = \left(\left(sinx^3\right)^2\right)' = 2\left(sinx^3\right) \cdot \left(sinx^3\right)' = 2sinx^3 \cdot cosx^3 \cdot \left(x^3\right)' = 2 \cdot 3x^2 \cdot sinx^3 \cdot cosx^3$$
$$= 3 \cdot x^2 \cdot sin2x^3$$

Пример № 12:

$f(x) = \sqrt{5x^2 - 7}$

Применим формулы: $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, $(u - v)' = u' - v'$

$$f'(x) = \left(\sqrt{5x^2 - 7}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 7}} \cdot \left(5x^2 - 7\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5x^2 - 7}} \cdot 10x = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 - 7}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 - 7}}$$

Пример № 13:

$f(x) = \sqrt{cos5x}$

Применим формулы: $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, $(cosu)' = -sinu \cdot u'$

$$f'(x) = \left(\sqrt{cos5x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{cos5x}} \cdot (cos5x)' = \frac{1}{2\sqrt{cos5x}} \cdot (-sin5x) \cdot (5x)' = \frac{1}{2\sqrt{cos5}} \cdot (-sin5x) =$$
$$= -\frac{5sin5x}{2\sqrt{cos5x}}$$

Пример № 14:

$f(x) = ln\frac{x+1}{x^3}$

Применим формулы: $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(ln\frac{x+1}{x^3}\right)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x^3}}\cdot\left(\frac{x+1}{x^3}\right)' = \frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'\cdot x^3-(x+1)\cdot\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)'} =$$

$$=\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{1\cdot x^3-3x^2\cdot(x+1)}{x^6}=\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{x^3-3x^3-3x^2}{x^6}=\frac{x^3}{x+1}\cdot\frac{-2x^3-3x^2}{x^6}=$$

$$=\frac{x^3\cdot x\cdot(-2x-3)}{(x+1)\cdot x^6}=\frac{-2x-3}{x(x+1)}=-\frac{2x+3}{x(x+1)}$$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание: Вычислить производные.

Вариант № 1:

1) $y=4x^2-7x^{10}+\ln 10x$

2) $y=\ell^{-4x^2+8}$

3) $y=ctg\sqrt{3x}$

4) $y==\cos(9x^2-7x+2)$

5) $y=\log_4(6x^3-8)$

6) $y=\ln(\sin x)$

7) $y=arctg^2 3x$

8) $y=4^{5x-1}$

9) $y=\sin\sqrt{3x-1}$

10) $y=\sqrt{2x^5-3}$

11) $y=(2x^3+4)^6$

12) $y=\cos(14x-3)$

13) $y=\sin\frac{6x}{7}$

14) $y=tg\frac{2x}{x+1}$

15) $y=\arcsin 7x$

16) $y=\arccos^3 2x$

Вариант № 2:

1) $y=6x^7-8x^3+\sin 17x$

2) $y=\ell^{4-25x^2-3x}$

3) $y=tg\frac{x-7}{x^3}$

4) $y=\sin(2x^3-7x^2-1)$

5) $y=\ln\sqrt{2x}$

6) $y=\log_2(2x^3+5x-6)$

7) $y=\sin^5 6x$

8) $y=5^{2x-3}$

9) $y=\cos\sqrt{6x^2-2}$

10) $y=\sqrt{7x+x^3}$

11) $y=(2x^5+4)^{10}$

12) $y=\sin(11x+x^5)$

13) $y=\cos\left(\frac{1}{3}x^3\right)$

14) $y=ctg\frac{2x-1}{x^2}$

15) $y=\arccos 19x$

16) $y=\arcsin^4 5x$

17) $y=\sqrt[7]{x^2+1}$

18) $y=\left(x^2-5x+8\right)^6$

19) $y=\dfrac{1}{\left(1-x^3\right)^5}$

20) $y=\dfrac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$

21) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-4x}{1+4x}}$

22) $y=\sin^5 6x$

23) $y=\sqrt{\cos 2x}$

24) $y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

25) $y=arcctg\sqrt{x}$

26) $y=\ell^{\sqrt{\sin^2 x}}$

27) $y=\sqrt[9]{\left(4x^2 7x+8\right)^2}$

17) $y=\sqrt[5]{x^3-3}$

18) $y=\left(x^3-2x^2+8\right)^3$

19) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

20) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$

21) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

22) $y=\cos^3\left(x^2+1\right)$

23) $y=tg^2x\cdot\sin x$

24) $y=\dfrac{tgx}{1-tgx}$

25) $y=arcctg\,\dfrac{x-1}{x+1}$

26) $y=\ell^{\left(x^2-7x^2+6\right)}$

27) $y=\sqrt[7]{\left(3x^4-5x^3+2\right)^3}$

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте понятие производной функции.
2. Введите производную суммы, разности, произведения и частного функций.
3. Производные элементарных функций.
4. Определение производной сложной функции.
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№7.

Тема: **Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.**

Цель: отработать алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке с помощью производной;

Краткие теоретические сведения:

Пусть функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [a, b]. В этом случае, как известно, она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах бывает важно найти те точки отрезка [a, b], которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка $[a,b]$.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке [a, b] функции y=f(x), нужно:

1^0. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку (a,b), и вычислить значения функции в этих точках.

2^0. Вычислить значения функции на концах отрезка [a,b],т. е. найти f(a) и f(b).

3^0. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке [a,b]; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

Пример №1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-6x$ отрезке [—3,4].

Решение.

1^0. Найдем критические точки функции в промежутке (-3;4). Имеем $y' = 3x^2 - 6$; решая уравнение $3x^2-6=0$, получаем $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}$. Эти точки принадлежат данному отрезку.

Вычислим значения функции в критических точках:

$$y(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 6(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$y(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

2^0. Находим значения функции на концах отрезка: y(—3) = —9, y(4) =40.

3^0. Сравнивая значения функции в критических точках и ее значения на концах отрезка, заключаем, что y =-9 является наименьшим, а y=40 — наибольшим значением функции на указанном отрезке.

Пример №2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-6x+5$ на отрезке [—5/2, 3/2].

Решение.

1^0. Находим критические точки, принадлежащие интервалу (—5/2, 3/2):

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1);$$

$$6(x^2 - 1) = 0, x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5 = 9;$$

$$f(1) = 2*1^3 - 6*1 + 5 = 1$$

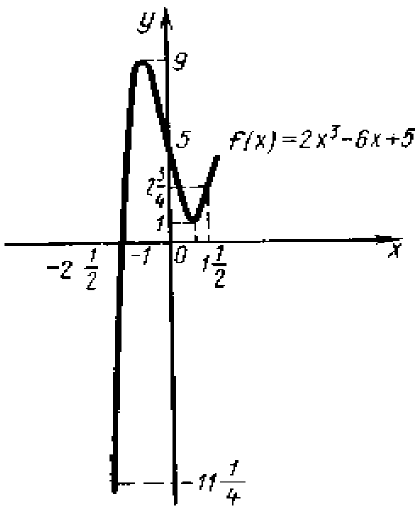
2^0. Вычислим значения функции на отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = -11\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = 2\frac{3}{4}.$$

3^0. Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваем отрезке есть $f(-1)=9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right)=-11\frac{1}{4}$

. Посмотрите на рисунок ниже.



*Пример № 3***.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^5-5x^4+5x^3+3$ на отрезке [-1;2].

Решение.

1^0. Находим критические точки, принадлежащие интервалу (-1,2), и значения функции в этих точках:

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$;

$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$;

$5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$;

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$

Критическая точка $x_3 = 3$ не принадлежит заданному отрезку.

Вычисляем значения функции в двух других критических точках: y(0)=3, y(1)=4.

2^0. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка: y(-1)= -8; y(2)=-5.

3^0.Сравнивай полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение функции y(1)=4, наименьшее y(-1)= -8.

Пример №4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x-2\sqrt{x}$ на отрезке [0;4].

Решение:

1^0. а). Найдем производную y' :

$$y' = 1-2\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = 1-x^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 1-\frac{1}{\sqrt{x}} ;$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$1-\frac{1}{\sqrt{x}}=0,$

$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=0, x\neq 0,$

$\sqrt{x}-1=0,$

$\sqrt{x}-1=0,$

$\sqrt{x}=1,$

$x=1$

Значит критические точки $x_1=1, x_2=0$.

$x_1=1$ принадлежит заданному интервалу (0;4).

в). Найдем значение функции в точке $x_1=1$:

y(1)=$1-2\sqrt{1}=1-2\cdot 1=1-2=-1$.

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

y(0)= $0-2\sqrt{0}=0-2\cdot 0=0-0=0$,

y(4)= $4-2\sqrt{4}=4-2\cdot 2=4-4=0$.

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

y(0)=0, y(4)=0- наибольшее значение функции на заданном отрезке,

y(1)=-1- наименьшее значение функции на заданном отрезке.

Пример №5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции y=$\sqrt{x+3}$ на отрезке [-3;1].

Решение:

1^0. а). Найдем производную y':

$$y'=\left((x+3)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(x+3)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot(x+3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2(x+3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$$\frac{1}{2\sqrt{x+3}}=0$$

$x\neq -3.$

Значит x=-3- критическая точка.

x=-3 не принадлежит интервалу (-3;1).

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

y(-3)=$\sqrt{-3+3}=0$,

y(1)= $\sqrt{1+3}=2$.

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

y(-3)=0- наименьшее значение функции на заданном отрезке,

y(1)=2- наибольшее значение функции на заданном отрезке.

<u>Пример №6</u>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции у=$\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Решение:

1^0. а). Найдем производную y' :

$$y' = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^2 + 2\cdot(x^{-1})' = 2x^2 + 2\cdot(-1)\cdot x^{-1-1} = 2x^2 - 2\cdot x^{-2} = 2x^2 - \frac{2}{x^2}.$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$$2x^2 - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^4 - 2}{x^2} = 0, x \neq 0,$$

$$2x^4 - 2 = 0,$$

$$x^4 - 1 = 0,$$

$$x^4 = 1,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Значит x_1=-1, x_2=1, x_3=0- критические точки.

x_1=-1, x_3=0- не принадлежат заданному интервалу $\left(\frac{1}{2};2\right)$,

x_2=1- принадлежит заданному интервалу.

в). Найдем значение функции в точке x_2=1:

у(1)= $\frac{2}{3}\cdot 1^3 + \frac{2}{1} = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}$.

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + 4 = \frac{1}{12} + 4 = 4\frac{1}{12},$$

$$y(2) = \frac{2}{3}\cdot 2^3 + \frac{2}{2} = \frac{2}{3}\cdot 8 + 1 = \frac{16}{3} + 1 = \frac{16+3}{3} = \frac{19}{3} = 16\frac{1}{3}.$$

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

у(1)=$2\frac{2}{3}$- наименьшее значение функции на заданном отрезке,

у(2)=$6\frac{1}{3}$- наибольшее значение функции на заданном отрезке.

<u>Пример №7</u>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции у = $3x - e^{3x}$ на отрезке [0;1].

Решение:

1^0. а). Найдем производную y' :

$$y' = 3 - 3e^{3x}$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$3-3e^{3x}=0$

$1-e^{3x}=0$

$e^{3x}=1$

$e^{3x}=e^{0}$

$3x=0$

$x=0\notin(0,1)$

x=0- критическая точка.

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

$y(0)=3\cdot 0-e^{3\cdot 0}=0-e^{0}=-1$,

$y(1)=3\cdot 1-e^{3\cdot 1}=3-e^{3}$.

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$y(1)=3-e^{3}$ - наименьшее значение функции на заданном отрезке,

$y(0)=-1$ - наибольшее значение функции на заданном отрезке.

<u>Пример №8</u>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции y $=x\ln x-x$ на отрезке $\left[\frac{1}{e};e\right]$.

Решение:

1^0. а). Найдем производную y' :

$$y'=(x\ln x)'-(x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-1=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$\ln x=0$

$\ln x=\ln e^{0}$

$\ln x=\ln 1$

$x=1\in\left(\frac{1}{e};e\right)$

x=1- критическая точка.

в). Найдем значение функции в точке x=1:

$y(1)=1\cdot\ln 1-1=1\cdot 0-1=-1$.

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

$y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\cdot\ln e^{-1}-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\cdot(-1)-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=-\frac{2}{e}$,

$y(e)=e\ln e-e=e\cdot 1-e=e-e=0$.

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$ - наименьшее значение функции на заданном отрезке,

$y(e)=0$ - наибольшее значение функции на заданном отрезке.

Пример №9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 5\sin x + 5\cos x$ на отрезке $[0;\pi]$.

Решение:

1^0. а). Найдем производную y':

$$y' = 5\cos x - 5\sin x,$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$$5\cos x - 5\sin x = 0$$

$$\cos x - \sin x = 0$$

$$1 - tgx = 0$$

$$tgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in z$$

$n = 0, x = \frac{\pi}{4} \in (0;\pi)$- критическая точка.

в). Найдем значение функции в точке $x = \frac{\pi}{4}$:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \cdot \sin\frac{\pi}{4} + 5\cos\frac{\pi}{4} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

$y(0) = 5\sin 0 + 5\cos 0 = 5 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5$,

$y(\pi) = 5\sin\pi + 5\cos\pi = 5 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) = -5$.

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$y(\pi) = -5$ - наименьшее значение функции на заданном отрезке,

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}$ - наибольшее значение функции на заданном отрезке.

Пример №10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

1^0. а). Найдем производную y':

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x,$$

б). Найдем критические точки (точки, в которых производная равна 0 или не существует):

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0$$
$$2\cos x - 4\sin x\cos x = 0$$
$$\cos x - 2\sin x\cos x = 0$$
$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\cos x = 0,$$
$$x = 2\pi n, n \in z.$$
$$n = 0, x = 0 \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 - 2\sin x = 0,$$
$$-2\sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2},$$
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in z$$
$$n = 0, x = \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$x_1 = 0, x_2 = \dfrac{\pi}{6}$ - критические точки.

в). Найдем значение функции в точке $x_2 = \dfrac{\pi}{6}$:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos(2\cdot\frac{\pi}{6}) = 2\cdot\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

2^0. Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y(0) = 2\sin 0 + \cos(2\cdot 0) = 0 + 1 = 1,$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) = 2\cdot 1 + \cos\pi = 2 - 1 = 1.$$

3^0. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$y(0) = 1, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ - наименьшее значение функции на заданном отрезке,

$y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1\dfrac{1}{2}$ - наибольшее значение функции на заданном отрезке.

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

Вариант 1:

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

1). f (x)=$2x^3+3x^2-36x$, [-4;3],

2). f (x)=$x^3+\dfrac{3}{x}$, $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$,

3). f (x)=x-$\sqrt{x}$, [0;4],

4). f (x)=lnx-x, $\left[\frac{1}{e};e\right]$,

5). f (x)=$2\sin x+2\cos x$, [0;π].

Вариант 2:
Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
1). f (x)= $2x^3+3x^2-36x$, [-2;1],

2). f (x)=$x+\frac{1}{x}$, [-2;4],

3). f (x)=$\sin x+\cos x,\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$,

4). f (x)=$x+e^{-x}$, [-1;1],

5). f (x)=$\sqrt{1-x^2}$, [0;1].

Вариант 3:
Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
1). f (x)=x^4-8x^2+5, [-3;2],

2). f (x)= $x+\frac{1}{x}$, [-2;-0,5],

3). f (x)=$\sqrt{x+5}$, [-1;4],

4). f (x)=$-\sin x-\cos x,\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,

5). f (x)=$2x - e^{2x}$, [0;1].

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Сформулируйте определение производной.
2. Как найти значение производной?
3. Дайте понятие определителя матрицы.
4. Объясните алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

5.Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа № 8

Тема: **Исследование функций на монотонность, точки экстремума, выпуклость, вогнутость.**

Цель: научиться определять с помощью производной промежутки монотонности функции, точки экстремума, промежутки выпуклости, вогнутости функции.

Краткие теоретические сведения:

- **Возрастание и убывание функций**
- **Исследование функции на экстремум с помощью первой производной**
- **Вогнутость, выпуклость. Точки перегиба**

1. Возрастание и убывание функций.

Понятие производной - одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая её механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Познакомимся с основными идеями, связанными с исследованием функций. Для этого рассмотрим график, какой-нибудь функции $y = f(x), x \in (a,b)$ (рисунок 1)

Интуитивно ясно, что в интервалах (a, x_1) и (x_2, b) данная функция возрастает, а в интервале (x_1, x_2) - убывает.

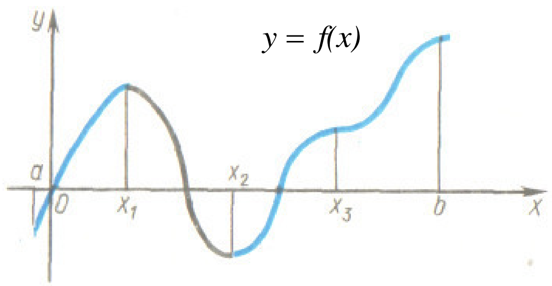


Рисунок 1

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Согласно определению возрастающей на некотором интервале функции имеем: если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$; если же $x_2 < x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$. Отсюда следует, что если $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, а если $x_2 - x_1 < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Определение 2. Интервалы, на которых функция возрастает или же убывает, называются интервалами монотонности функции, а сама функция называется монотонной на этих интервалах.

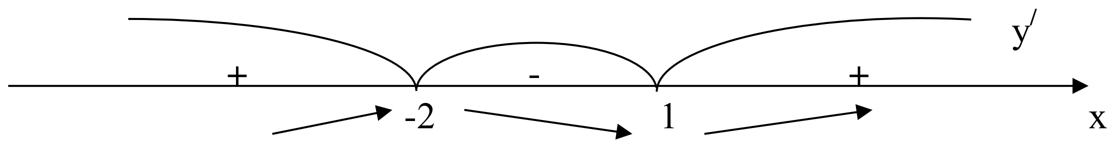
Признаки возрастания и убывания функции:

Если производная функция $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).

Показать, что функция $y = 2x^2 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает на интервале $(-2{,}1)$.

Решение: Достаточно убедиться в том, что производная функция при $-2 < x < 1$ отрицательна. Находим $y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$.

Решив уравнение $y' = 0$ получим $x =$ -2 и $x = 1$



Множитель $x + 2$ на интервале $(-2{,}1)$ положителен, а множитель $x - 1$ отрицателен. Значит, произвольная во всех точках указанного интервала отрицательна, следовательно, функция убывает. Ответ: при $-2 \langle x \langle 1$ функция убывает.

Мы установили, что интервалы возрастания или убывания функции совпадают с интервалами, в которых производная этой функции сохраняет знак. Следовательно, переход от возрастания к убыванию или обратно возможен лишь в точках, где производная меняет знак. Такими точками могут служить только такие точки, в которых $f'(x) = 0$, а также точки разрыва.

Поэтому интервалы монотонности мы получим, если разделим область определения функции на части, границами которых служат те точки, в которых $f'(x) = 0$, и точки разрыва.

Схема нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$:

1) Вычисляют производную $f'(x)$ данной функции.

2) Находят точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются критическими для функции $f'(x)$.

3) Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на котором из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности.

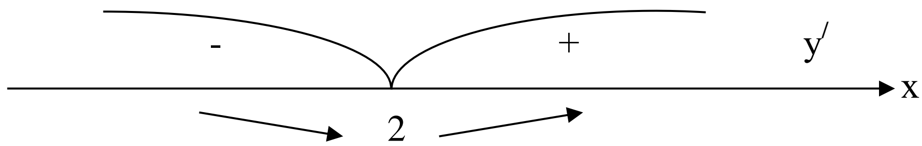
4) Исследуют знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x)>0$, то на этом интервале $f'(x)$ возрастает, если же $f'(x)<0$, то на таком интервале $f'(x)$ убывает.

Задача 1:

Найти: интервалы монотонности следующей функции $y=x^2-4x+1$

Решение:

1. Находим производную данной функции $y'=2x-4$.
2. Находим критические точки функции: $2x-4=0; 2x=4; x=2$.
3. Область определения функции $(-\infty;\infty)$ разбивается на интервалы $(-\infty;2)$ и $(2;\infty)$



4. На интервале $(-\infty;2)$ имеем $y'<0$. Следовательно, на интервале $(-\infty;2)$ функция убывает.

На интервале $(2;\infty)$ имеем $y'>0$. Значит, на интервале $(2;\infty)$ функция возрастает.

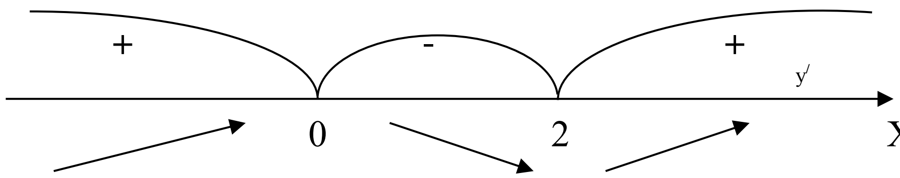
Задача 2:

Найти: интервалы монотонности следующей функции $y=x^3-3x^2$.

Решение:

1. Находим производную длинной функции $y'=3x^2-6x$.
2. Находим критические точки функции $3x^2-6x=0$; $3x(x-2)=0$

   $x_1=0, x_2=2$.
3. Область определения функции $(-\infty;\infty)$ разбивается на интервалы $(-\infty;0),(0;2),(2;\infty)$.



4. Имеем: $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=9>0$, следовательно, в интервале $(-\infty;0)$ функция возрастает; $f'(1)=3(1)^2-6\cdot 1=9<0$, значит, в интервале $(0;2)$ функция убывает; $f'(3)=3(3)^2-6\cdot 3=9<0$, поэтому в интервале $(2;\infty)$ функция возрастает.

2. Исследование функции на экстремум с помощью первой производной.

Определение. Точка $x=a$ называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если имеет место неравенство $f(a)>f(x)$ (соответственно $f(a)<f(x)$) для любого x из некоторой окрестности точки $x=a$.

Если $x=a$ - точка максимума (минимума) функции $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке $x=a$.

Максимум и минимум функции объединяют названием экстремум функции, а точки максимума и минимума называют точками экстремума (экстремальные точки). На рисунке x_1 и x_3 - точки максимума, точки x_2 и x_4 – точки минимума.

Не следует считать, что максимум функции является наибольшим значением

во всей области определения этой функции; он является наибольшим лишь по сравнению со значениями функции, взятыми в некоторой окрестности точки максимума.

На данном интервале функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов, причём некоторые из максимумов могут быть меньше некоторых минимумов.

Из рисунка видно, что значение $f(x_1)$, представляющее собой максимум функции $f(x)$, не является наибольшим значением этой функции на интервале (a,b) и, более того, $f(x_1)$ меньше чем значение $f(x_4)$, является минимумом данной функции.

Аналогично, минимум функции не обязательно является наименьшим значением данной функции.

Теорема (достаточный признак экстремума).

Если производная $f'(x)$ при переходе x через a меняет знак, то a является точкой экстремума функции $f(x)$.

Схема исследования функции на экстремум:

1. Находим производную $f'(x)$.
2. Находим все критические точки из области определения функции.
3. Устанавливаем знаки производной функции при переходе через критические точки и выписываем точки экстремума.
4. Вычисляем значения функции $f(x)$ в каждой экстремальной точке.

Задача 1.

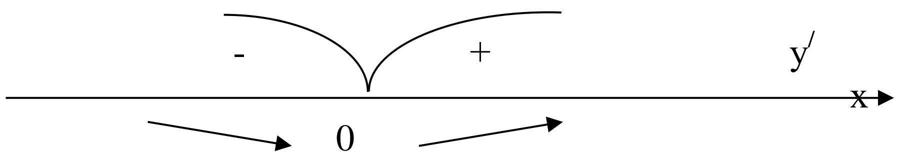
Исследование на экстремум следующие функции: $y = x^2 + 2$.

Решение:

1. Находим производную: $y' = \left(x^2 + 2\right)' = 2x$.

2. Приравнивает её к нулю: $2x = 0$, откуда $x = 0$ - критическая точка.

3. Определяем знак производной при значении $x < 0$, например $x = -1$: $y'_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2$



4. Определяем знак производной при $x > 0$, например при $x = 1$: $y' = 2 \cdot 1 = 2$. Так как при переходе через $x = 0$ производная изменяет с минуса на плюс, при $x = 0$ функция имеет минимум.

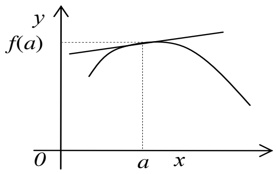
5. Находим минимальное значение функции, т.е. $f(0) = 0^2 + 2 = 2$.

Ответ: $x = 0$ - точка минимума, $f(0) = 2$ - минимум.

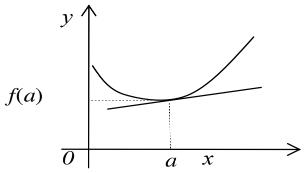
3. Вогнутость, выпуклость. Точки перегиба.

Определение: кривая называется выпуклой в точке $x = a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена под своей касательной в точке $(a; f(a))$;

Теорема. Если вторая производная функции $y = f(x)$ в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна, то выпуклая в этом промежутке.



кривая выпуклая



кривая вогнутая

$y^{//} < 0$ $\qquad$ $y^{//} > 0$

Схема нахождения интервалов выпуклости графика функции:

1. Находят вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

2. Определяют интервалы, на которые область определения функции разбивается найденными точками.

3. Устанавливают знаки второй производной в каждом из указанных интервалов. Если $y''(x) < 0$, то на рассматриваемом интервале кривая выпуклая; если $y''(x) > 0$ - вогнута.

Задача 1:

Исследовать на выпуклость и вогнутость кривую $y = x^2 - x$

Решение:

1. Найдем вторую производную: $y' = 2x - 1; y'' = 2$. Так как вторая производная положительна, то кривая вогнута на всей области определения $(-\infty;\infty)$.

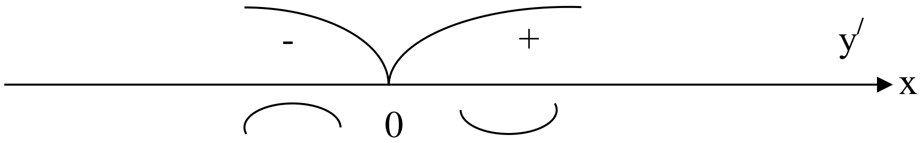
Задача 2:

Определить выпуклость кривой $y = x^3$.

Решение:

1. Найдем вторую производную: $y' = 3x^2; y'' = 6x$. Она равна нулю в точке $x = 0$.

2. Точка $x = 0$ разбивает область определения функции на интервалы $(-\infty, 0), (0, \infty)$.



3. Условием выпуклости кривой является $f''(x) < 0$. Тогда $6x < 0, x < 0$, т. е. кривая выпукла в интервале $(-\infty, 0)$.

Задача 3:

Найти точки перегиба кривой $y = x^3 - 6x^2 + 4$.

Решение:

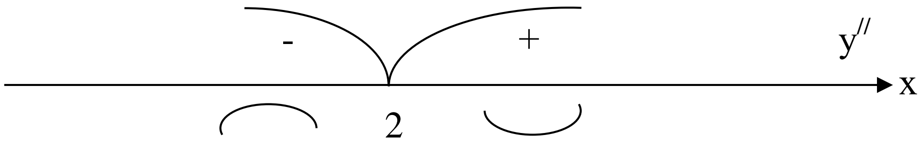
1. $y' = (x^3 - 6x^2 + 4)' = 3x^2 - 12x$

$y'' = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$

$y'' = 0$, если $6x - 12 = 0$

$6x = 12$

$x = 2$



если $x\langle 2$, то $y''\langle 0$, кривая выпуклая;

если $x\rangle 2$, то $y''\rangle 0$, кривая вогнутая.

Итак, при переходе через точку $x = 2$ вторая производная $y''(x)$ меняет знак. Следовательно, кривая имеет точку перегиба, абсцисса которой равна 2.

Подставляя в уравнение кривой $y = x^3 - 6x^2 + 4$ $x = 2$, получим ординату точки $y = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 = -12$.

Итак (2; -12) – точка перегиба.

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Вариант № 1:

- Найти промежутки монотонности:

1. $y = x^2 - 6x + 5$
2. $y = x^3 - 3x^2 + 1$
3. $y = -\frac{1}{4}x^4 - x + 1$
4. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$

- Исследовать функцию на экстремум:

1. $y = x^2 - x$
2. $y = x^2 + 8x + 12$
3. $y = -2x^2 + x + 1$
4. $y = 2x^4 - x$

- Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривых:

1. $y = x^3 - 12x^2 + 3x$
2. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{16}x^3 - x^2$
3. $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$
4. $y = 12x^4 - 12x^2$

- Найти точки перегиба:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$
2. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9$
3. $y = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 50$

Вариант № 2:

- Найти промежутки монотонности:

1. $y = 2x^2 - 4x + 5$
2. $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$
3. $y = x^4 - 4x + 3$
4. $y = -2x^3 + 15x^2 - 26x + 20$

- Исследовать функцию на экстремум:

1. $y = x^2 - 3x$
2. $y = x^2 - 4x - 3$
3. $y = -x^2 - x + 6$
4. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$

- Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривых:

1. $e = -x^3 + 3x^2$
2. $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 4x^2$
3. $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$
4. $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$

- Найти точки перегиба:

1. $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$
2. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$
3. $y = \frac{1}{16}x^4 - x^2$

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Область определения функции.
2. Понятие четности и нечетности функции.
3. Правила нахождения точек пересечения функции с осями координат.
4. Классификация точек разрыва функции.
5. Виды асимптот и правила их нахождения.

6. Алгоритм исследования функции на монотонность и точки экстремума.
7. Вторая производная и ее применение для исследования графика функции.

Практическая работа №9.

Тема: **Исследование и построение эскизов графиков функций с помощью производной.**

Цель: отработать понятие точек разрыва; навык нахождения асимптот различных видов для эскиза графика; применять знания по построению графика непрерывной функции.

Краткие теоретические сведения:

Схема исследования функций:

1. Найти область определения функции
2. Выяснить особые свойства функции: четность, нечетность, периодичность
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат
4. Найти точки разрыва и асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции и ее экстремум.
6. Найти промежутки выпуклости, вогнутости графика с помощью второй производной и точки перегиба.
7. Полученные данные занести в таблицу.
8. Дополнительные точки
9. На основании проведенного исследования построить график функции

Этот план исследования функции является примерным, можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции.

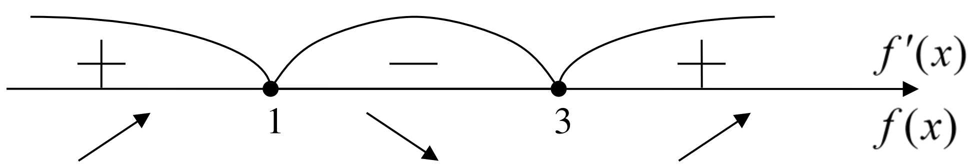
Пример1:

Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить ее график.

Решение:

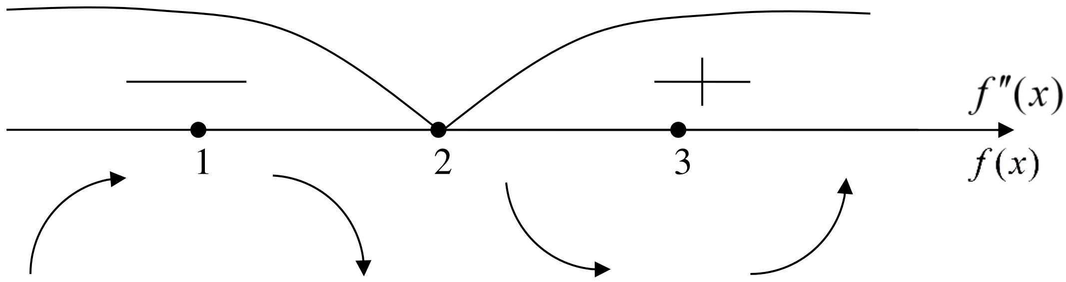
1. Область определения: $x \in R$.
2. Данная функция не является ни четной ни нечетной.
3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:
   а). с осью ОХ: $y = 0$,
   в данном случае х найти затруднительно,
   б). с осью ОУ: $x = 0$,
   тогда $y = -3$. Точка $(0;-3)$.
4. Очевидно, что график не имеет асимптот.
5. Найдем производную:
   $y' = 3x^2 - 12x + 9$.
   $3x^2 - 12x + 9 = 0$
   $x^2 - 4x + 3 = 0$
   $x_1 = 1, x_2 = 3$

$x_1 = 1, x_2 = 3$- стационарные точки



На промежутках $x \in (-\infty;1) \cup (3;\infty)$ график функции возрастает,
на промежутке $x \in (1;3)$ функция убывает.
$x = 1$ - точка максимума, $y_{max} = y(1) = 1$.
$x = 3$ - точка минимума, $y_{min} = y(3) = -3$.

6. Найдем вторую производную:
   $y'' = 6x - 12$.
   $6x - 12 = 0$
   $x = 2$



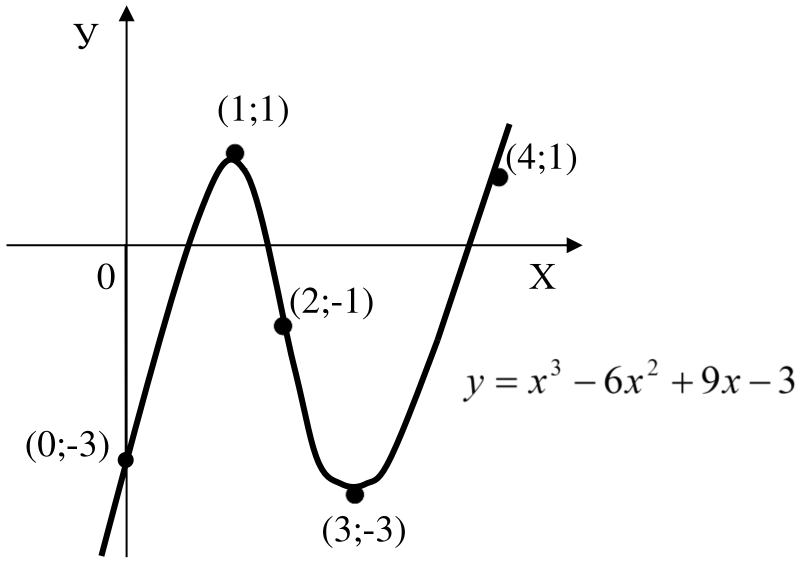
На промежутке $x \in (-\infty;2)$ $f''(x) < 0$, значит функция выпуклая.
На промежутке $x \in (2;\infty)$ $f''(x) > 0$, значит функция вогнутая.
Точка $x = 2$ - точка перегиба.
$y(2) = -1$.

7. Полученные данные занесем в таблицу:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	X	—	0	+
$f''(x)$	—	—	—	0	+	+	+
$f(x)$							

8. Дополнительные точки: $y(4) = 1$.

9. Построим эскиз графика функции:



Пример2:

Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 2$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения: $x \in R$.
2. Данная функция не является ни четной ни нечетной.
3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

   а). а). с осью ОХ: $y = 0$,

   в данном случае х найти затруднительно,

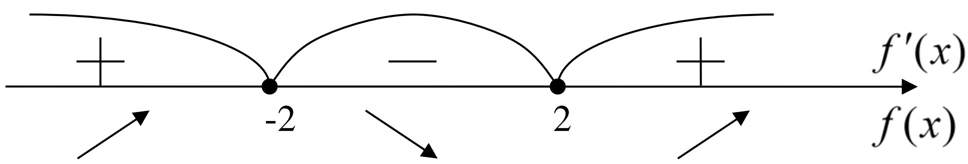
   б). с осью ОУ: $x = 0$,

   тогда $y = 2$. Точка $(0;2)$.
4. Очевидно, что график не имеет асимптот.
5. Найдем производную:

   $$y' = \frac{3}{4}x^2 - 3$$

   $$\frac{3}{4}x^2 - 3 = 0, x^2 = 4, x_1 = -2, x_2 = 2$$

   $x_1 = -2, x_2 = 2$ - стационарные точки



На промежутках $x \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$ график функции возрастает, на промежутке $x \in (-2;2)$ функция убывает.

$x = -2$ - точка максимума, $y_{\max} = y(-2) = 6$.

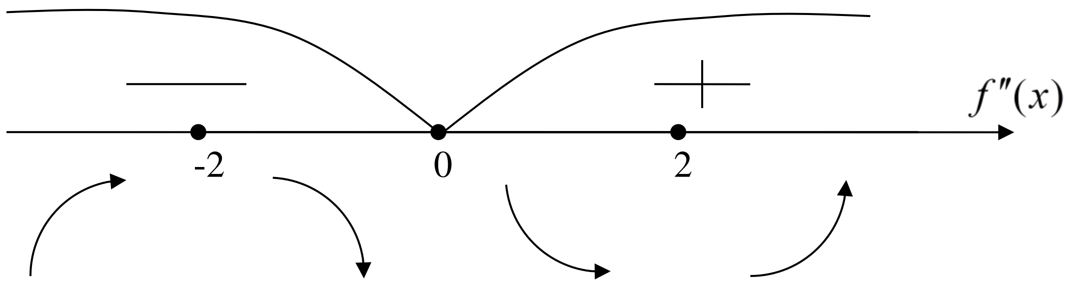
$x = 2$ - точка минимума, $y_{\min} = y(2) = -2$.

6. Найдем вторую производную:

$y'' = \frac{3}{2}x$.

$\frac{3}{2}x = 0$

$x = 0$



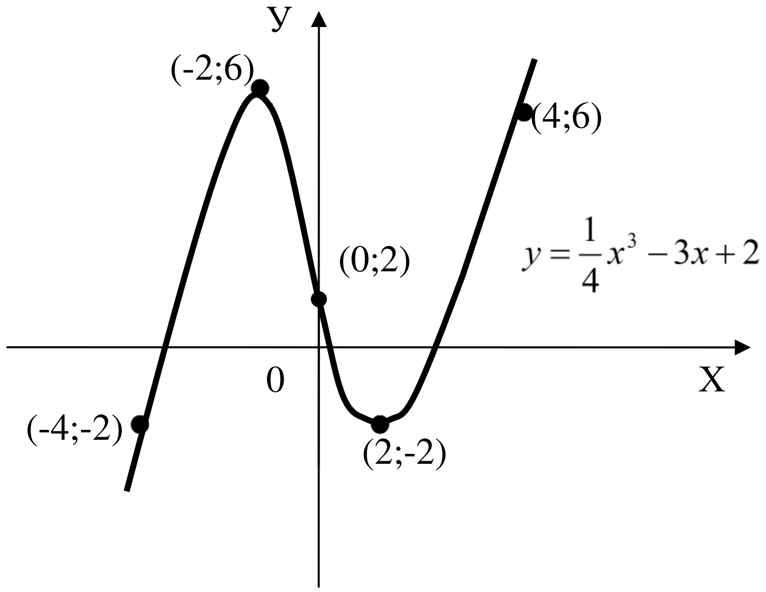
На промежутке $x \in (-\infty;0)$ $f''(x) < 0$, значит функция выпуклая.
На промежутке $x \in (0;\infty)$ $f''(x) > 0$, значит функция вогнутая.
Точка $x = 0$ - точка перегиба.
$y(0) = -2$.

7. Полученные данные занесем в таблицу:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	X	—	0	+
$f''(x)$	—	—	—	0	+	+	+
$f(x)$							

8. Дополнительные точки: $y(4) = 6$, $y(-4) = -2$.

9. Построим эскиз графика функции:



Пример3:

Исследовать функцию $y=\frac{x^2}{x-3}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения: $x \neq 3$.
2. Данная функция не является ни четной ни нечетной.
3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

   а). а). с осью ОХ: $y=0$,

   $\frac{x^2}{x-3}=0, \tilde{o}=0$,

   Точка (0;0).

   б). с осью ОУ: $x=0$,

   тогда $y=0$. Точка $(0;0)$.
4. Найдем асимптоты.

   а). Точка разрыва: $x=3$.

Найдем пределы:

$\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\frac{x^2}{x-3}=\pm\infty$, тогда $x=3$- точка разрыва II рода.

Следовательно $x=3$- вертикальная асимптота.

б). Горизонтальных асимптот нет:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-3}=\pm\infty$$

в). Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-3)}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-3}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{3x}{x-3}=3.$$

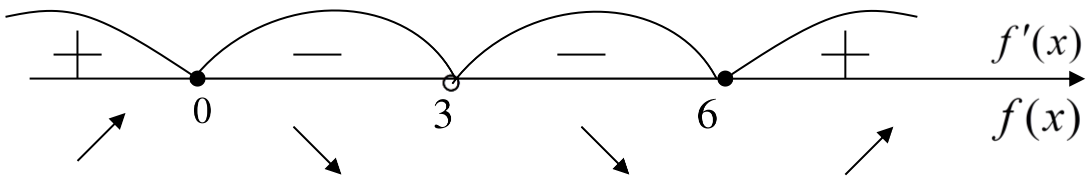
Значит $y=x+3$- наклонная асимптота.

5. Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-3}\right)' = \frac{2x(x-3)-x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2},$$

$$\frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0, x_1 = 0, x_2 = 6$$

$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 3$ - критические точки



На промежутках $x \in (-\infty;0) \cup (6;\infty)$ график функции возрастает,
на промежутке $x \in (0;3) \cup (3;6)$ функция убывает.

$x = 0$ - точка максимума, $y_{max} = y(0) = 0$.

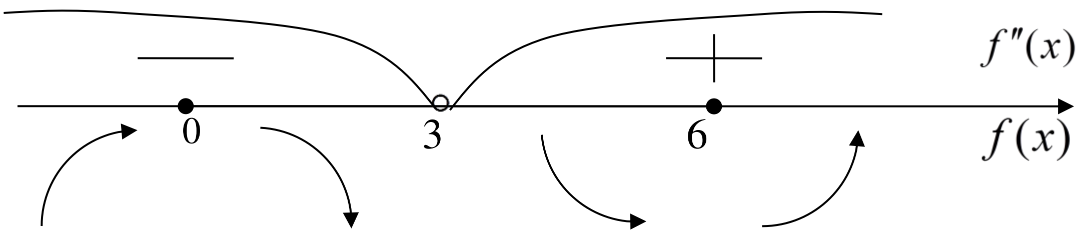
$x = 6$ - точка минимума, $y_{min} = y(6) = 12$.

6. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x(x-6)}{(x-3)^2}\right)'' = \left(\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}\right)'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x)2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^3}$$

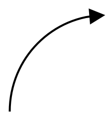
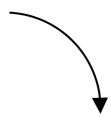
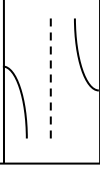
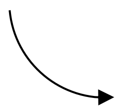
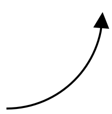
$$\frac{18}{(x-3)^3} = 0$$

$x \neq 3$- точка разрыва.
Точек перегиба нет.



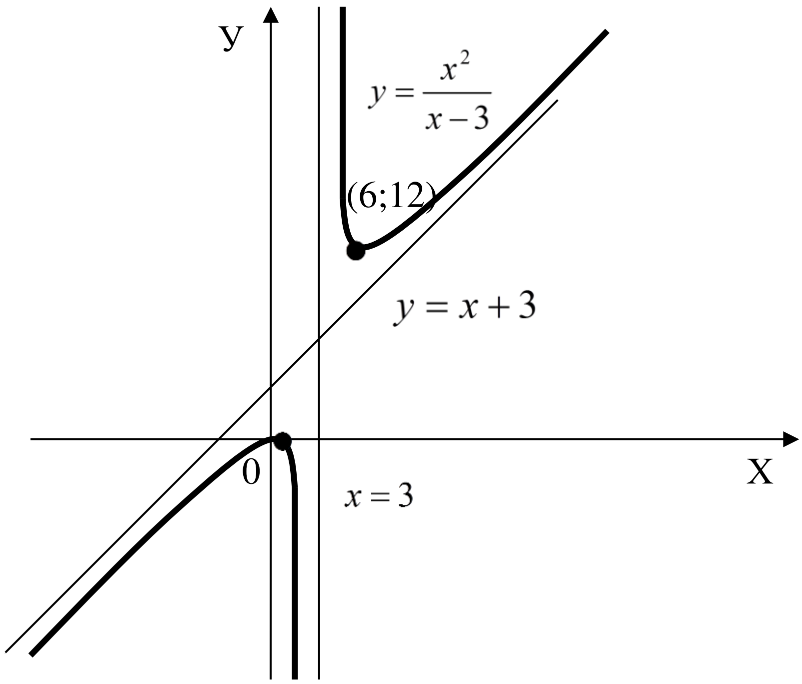
На промежутке $x \in (-\infty;3)$ $f''(x) < 0$, значит функция выпуклая.
На промежутке $x \in (3;\infty)$ $f''(x) > 0$, значит функция вогнутая.

7. Полученные данные занесем в таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;3)$	3	$(3;6)$	6	$(6;\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	X	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	X	+	+	+
$f(x)$							

8. Дополнительные точки .

9. Построим эскиз графика функции:



Пример4:

Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения: $x \neq \pm\sqrt{3}$.
2. Данная функция является нечетной:

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\frac{x^3}{3-x^2}=-y(x).$$

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

   а). а). с осью ОХ: $y=0$,

   $\frac{x^3}{3-x^2}=0, \tilde{o}=0$,

   Точка (0;0).

   б). с осью ОУ: $x=0$,

   тогда $y=0$. Точка $(0;0)$.

4. Найдем асимптоты.

   а). Точки разрыва: $x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}$.

   Найдем пределы:

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}\pm0}\frac{x^3}{3-x^2}=\pm\infty$, тогда $x=-\sqrt{3}$ - точка разрыва II рода.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}\pm0}\frac{x^3}{3-x^2}=\pm\infty$, тогда $x=\sqrt{3}$ - точка разрыва II рода.

Следовательно $x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{3}$ - вертикальные асимптоты.

б). Горизонтальных асимптот нет, так как:

$$\lim_{x\to x\pm\infty}\frac{x^3}{3-x^2}=\pm\infty$$

в). Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(3-x^2)}=-1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{3-x^2}+1\cdot x\right]=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

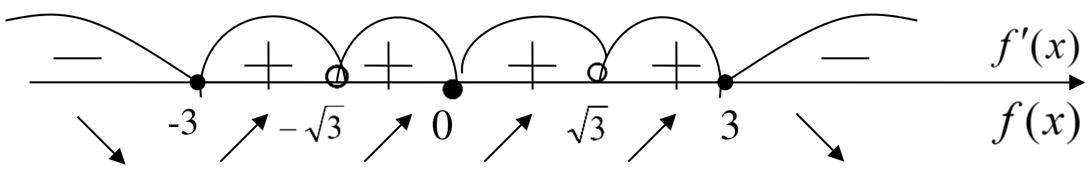
Значит $y=-x$ - наклонная асимптота.

5. Найдем производную:

$$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-3x^4+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2},$$

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}=0, x_1=0, x_2=-3, x_3=3$$

$x_1=0, x_2=-3, x_3=3, x_4=-\sqrt{3}, x_5=\sqrt{3}$ - критические точки



На промежутках $x\in\left(-3;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$ график функции возрастает,

на промежутке $x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(3;\infty\right)$ функция убывает.

$x=3$ - точка максимума, $y_{\max}=y(3)=-4{,}5$.

$x=-3$ - точка минимума, $y_{\min}=y(-3)=4{,}5$.

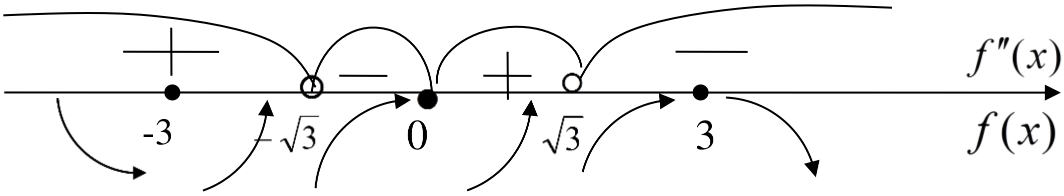
6. Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}\right)''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)''=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{6x^3+54x}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}$$

$$\frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}=0, x=0, x\neq\pm\sqrt{3}$$

$x=0$ - точка перегиба.



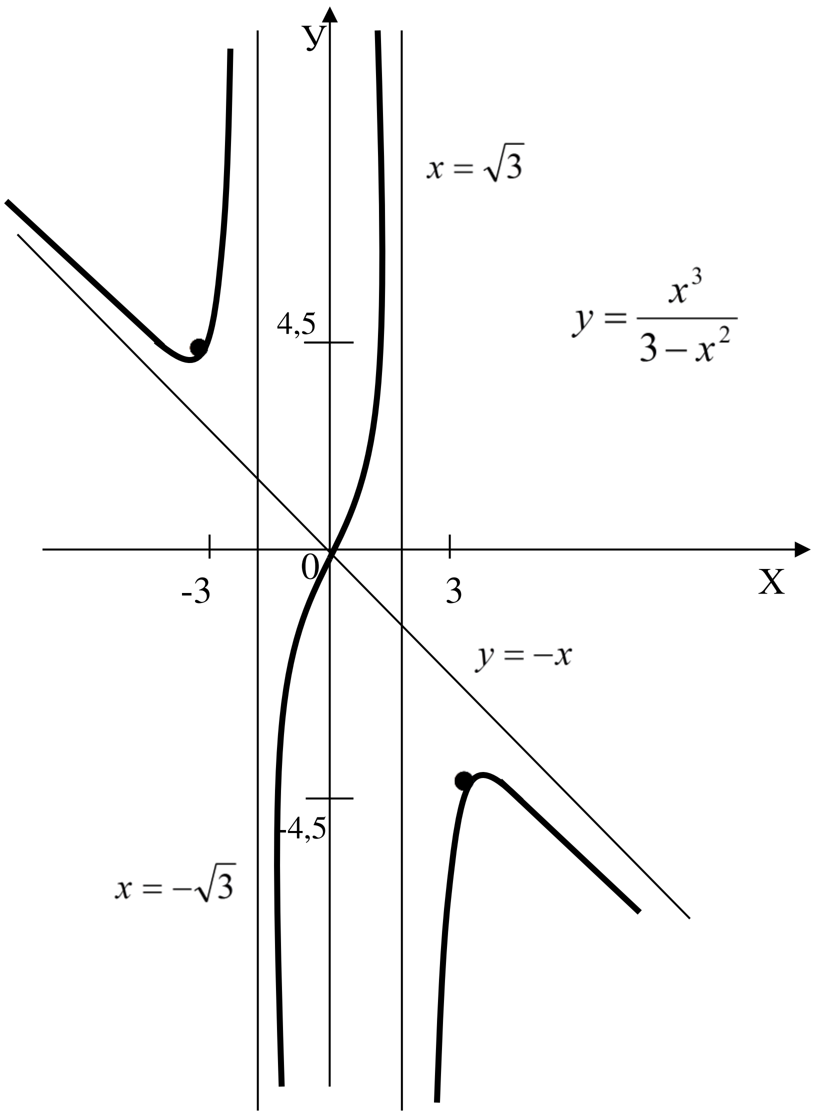
На промежутке $x \in \left(-\sqrt{3};0\right) \cup \left(\sqrt{3};\infty\right)$ $f''(x) < 0$, значит функция выпуклая.
На промежутке $x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\sqrt{3}\right)$ $f''(x) > 0$, значит функция вогнутая.

7. Полученные данные занесем в таблицу:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	X	+	0	+	X	+	0	−
$f''(x)$	+	X	+	X	−	0	+	X	−	X	−
$f(x)$											

8. Дополнительные точки .

9. Построим эскиз графика функции:



Пример5:

Исследовать функцию $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения: $x\in R$.
2. Данная функция является четной:

   $y(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=y(x)$.
3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

   а). а). с осью ОХ: $y=0$,

   $\frac{x^2-1}{x^2+1}=0, \tilde{o}^2-1=0, x^2=1, x_1=-1, x_2=1$,

   Точки (-1;0) и (1;0).

   б). с осью ОУ: $x=0$,

   тогда $y=-1$. Точка $(0;-1)$.
4. Найдем асимптоты.

   а). Точек разрыва нет, значит нет вертикальных асимптот.

б). Горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \to x\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1,$$

Значит $y=1$ - горизонтальная асимптота.

в). Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = 0.$$

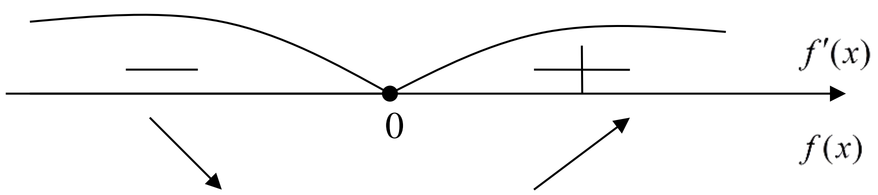
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}+0\cdot x\right] = 1.$$

Значит $y=1$ - наклонная асимптота.

5. Найдем производную:

$$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$

$\dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0, x=0$ - критическая точка



На промежутке $x\in(0;\infty)$ график функции возрастает,

на промежутке $x\in(-\infty;0)$ функция убывает.

$x=0$ - точка минимума, $y_{\min} = y(0) = -1$.

6. Найдем вторую производную:

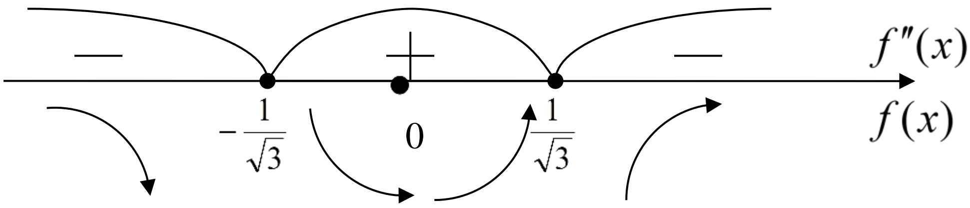
$$y'' = \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)'' = \frac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = 0, x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}6$$

$x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ - точки перегиба.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}$$



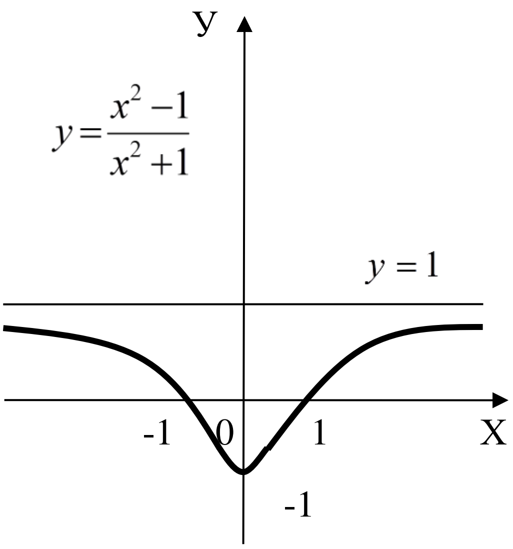
На промежутке $x \in \left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right)$ $f''(x) < 0$, значит функция выпуклая.

На промежутке $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $f''(x) > 0$, значит функция вогнутая.

7. Полученные данные занесем в таблицу:

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$	0	$\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\infty\right)$
$f'(x)$	—	X	—	0	+	X	+
$f''(x)$	—	0	+	X	+	0	—
$f(x)$							

8. Дополнительные точки .
9. Построим эскиз графика функции:



Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание: Исследовать и построить график функции.

I- B 1). $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$; 1). $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; 2). $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$.
II-B 1). $y = x^3 - 6x^2 + 16$; 1). $y = \dfrac{x^2}{x+3}$; 2). $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.
III-B 1). $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$; 1). $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; 2). $y = \dfrac{6 - x^3}{x^2}$.
IV-B 1). $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$; 1). $y = \dfrac{x^2}{x+2}$; 2). $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Область определения функции.
2. Понятие четности и нечетности функции.
3. Правила нахождения точек пересечения функции с осями координат.
4. Классификация точек разрыва функции.
5. Виды асимптот и правила их нахождения.
6. Алгоритм исследования функции на монотонность и точки экстремума.
7. Вторая производная и ее применение для исследования графика функции.
8. Полная схема исследования функции и построения ее эскиза.

Практическая работа№10.

Тема: **Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал.**

Цель: отработать навыки нахождения области определения функций двух переменных, частных производных функции двух переменных, вычислять полный дифференциал функции двух переменных;

Краткие теоретические сведения:

Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал.

- **Функции нескольких переменных.**
- **Частные производные и полный дифференциал функции.**

1. Функции нескольких переменных.

Определение1: Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z.

Обозначение: $z = f(x, y), z = F(x, y), z = z(x, y)$

Значение функции $z = f(x, y)$ при x=a и y=в обозначают $f(a,b)$.

Упорядоченная пара чисел x и y называется *точкой* $M(x, y)$, а функция двух пе ременных- *функцией этой точки* $z = f(M)$.

Определение 2: Переменная величина u называется *функцией трех переменных* величин x , y и z, если каждой паре допустимых значений x , y и z соответствует единственное значение u.

Аналогично определяется функция n переменных.

*Определение 3:*Множество всех точек в которых определена функция n переменных называется *областью определения функции*.

Некоторую замкнутую область D на плоскости , ограниченную данными линиями, можно задать с помощью одной или нескольких систем неравенств вида:

$a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)$ (1)

<u>Примеры:</u>

1. Найти область определения функции: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Решение:

Данная функция определена, если $9 - x^2 - y^2 \ge 0$, то есть $x^2 + y^2 \le 9$.

Этому неравенству соответственно удовлетворяют координаты всех точек, которые находятся внутри круга радиуса $R = 3$ с центром в начале координат, а также на его границе.

Областью определения данной функции и является указанный круг.

2. Найти область определения функции: $z = \sqrt{5x} - \dfrac{3}{\sqrt{y}}$.

Решение:

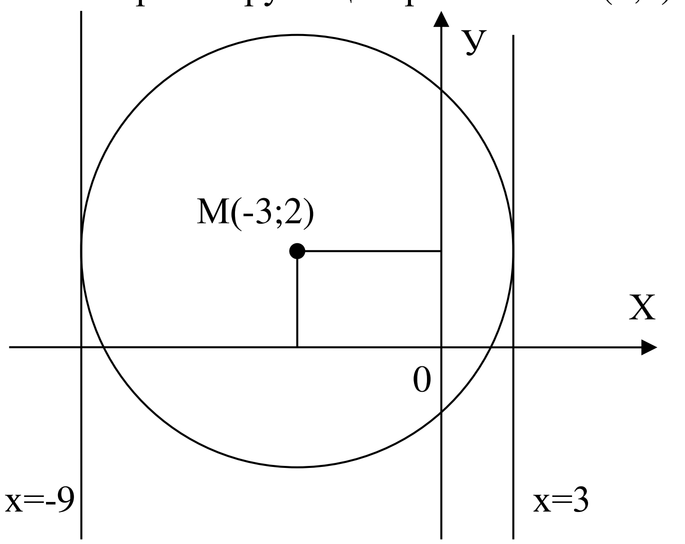
Первое слагаемое определено при $x \geq 0$, а второе - при $y > 0$. Следовательно, область определения есть 1-ая четверть плоскости xOy.

3. Дана функция $f(x, y) = \dfrac{5x - y + 1}{2x^2 + y + 1}$. Вычислить $f(0,0), f(2,1)$.

4. Найти область D, представляющую собой множество точек круга с центром в точке (-3;2) и радиусом 6.

Решение:

Построим круг с центром в точке (3;2) и радиусом 6:



Абсциссы точек круга изменяются в промежутке $-9 \leq x \leq 3$. Уравнение заданной окружности имеет вид: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 36$, преобразуем:

$$(y-2)^2 = 36 - (x+3)^2,$$

$$(y-2)^2 = 36 - x^2 - 6x - 9,$$

$$(y-2)^2 = 27 - x^2 - 6x,$$

$$y - 2 = \pm\sqrt{27 - x^2 - 6x}$$

Тогда:

1). $y - 2 = -\sqrt{27 - x^2 - 6x}$ или

$y = 2 - \sqrt{27 - x^2 - 6x}$ - уравнение, задающее нижнюю полуокружность.

2). $y-2=+\sqrt{27-x^2-6x}$ или

$y=2+\sqrt{27-x^2-6x}$ - уравнение, задающее верхнюю полуокружность.

При изменении x в промежутке $-9\le x\le 3$ функция изменяется от $2-\sqrt{27-x^2-6x}$ до $2+\sqrt{27-x^2-6x}$. Следовательно, множество D определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -9\le x\le 3 \\ 2-\sqrt{27-x^2-6x}\le y\le 2+\sqrt{27-x^2-6x} \end{cases}.$$

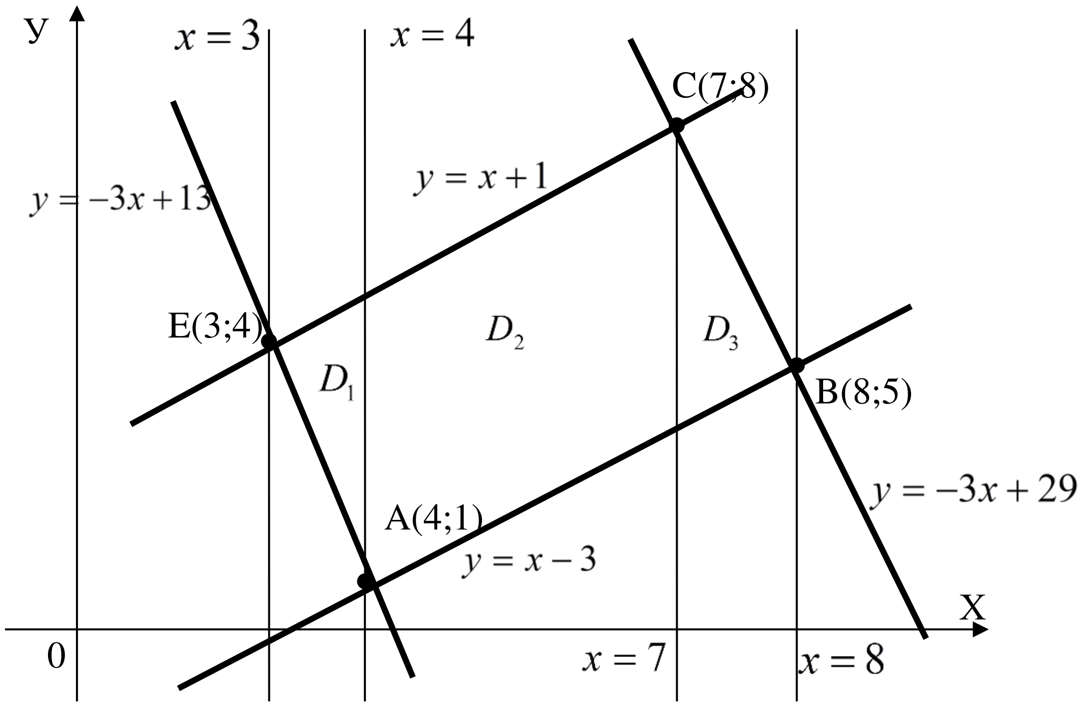
5. Область D задана параллелограммом со сторонами $y=x-3, y=x+1, y=-3x+13, y=-3x+29.$ Записать с помощью систем неравенств вида (1) множество точек заданной области.

Решение:

Найдем точки пересечения заданных прямых и построим параллелограмм:

$\begin{cases} y=x-3, \\ y=-3x+13, \end{cases}$ $A(4;1)$; $\begin{cases} y=x-3, \\ y=-3x+29, \end{cases}$ $B(8;5)$;

$\begin{cases} y=-3x+29, \\ y=x+1, \end{cases}$ $C(7;8)$; $\begin{cases} y=x+1, \\ y=-3x+13, \end{cases}$ $E(3;4)$.



Через вершины параллелограмма проведем прямые параллельные оси ОУ. Область D, ограниченная заданным параллелограммом, разделится этими прямыми на три области D_1, D_2, D_3. Каждую из этих областей представим системой неравенств вида (1).

D_1: $3\le x\le 4$.

Снизу ограничена прямой $y = -3x + 13$, а сверху- $y = x + 1$. Тогда $-3x + 13 \le y \le x + 1$.

Следовательно:

$$D_1 : \begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ -3x + 13 \le y \le x + 1 \end{cases},$$

$$D_2 : \begin{cases} 4 \le x \le 7 \\ x - 3 \le y \le x + 1 \end{cases},$$

$$D_3 : \begin{cases} 7 \le x \le 8 \\ x - 3 \le y \le -3x + 29 \end{cases}.$$

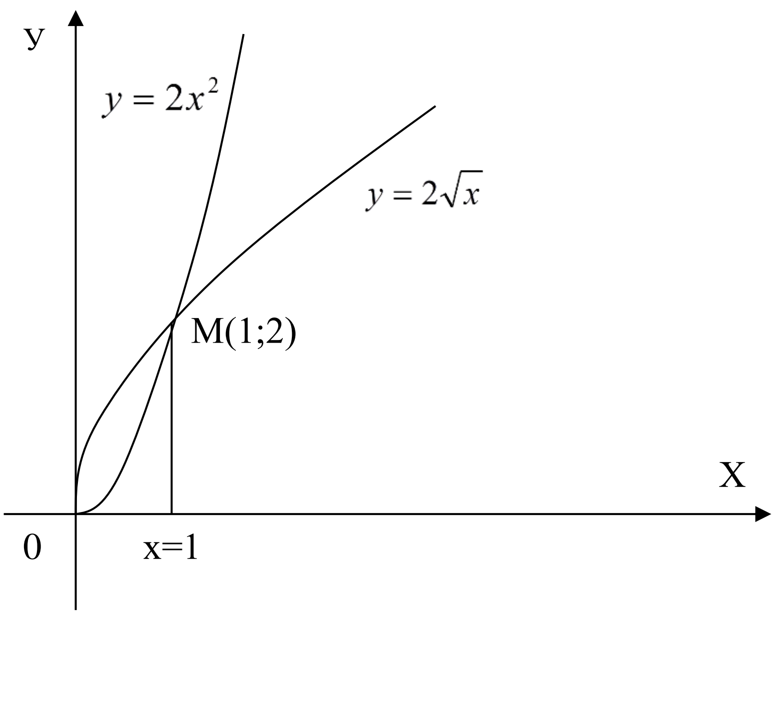
6. Область D заключена между параболами $y^2 = 4x$ и $x^2 = \frac{1}{2} y$. Записать с помощью систем неравенств вида (1) множество точек этой области.

Решение:

Найдем точки пересечения парабол. Имеем $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x^2 \end{cases}$, O(0;0), M(1;2).

$x^2 = \frac{1}{2} y$, тогда $y = 2x^2$.

$y^2 = 4x$, тогда $y = 2\sqrt{x}$.



$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x^2 \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}.$$

2. Частные производные и полный дифференциал функции.

Определение 1: Частной производной функции $z = f(x, y)$ *по переменной* x называется производная этой функции при постоянном значении переменной y и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x.

Определение 2: *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ *по переменной y* называется производная этой функции при постоянном значении переменной x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y.

Утверждение: Частная производная функции нескольких переменных по одной переменной определяется как производная этой функции по соответствующей переменной при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Определение 3: *Полным дифференциалом* функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке *M(x;y)* называется выражение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (2)$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются в точке *M(x;y)*, а $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Примеры:

1. Найти частные производные функций:

1). $z = x^3 + 2xy^2 + 3y^3$; 2). $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Решение:

1). $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy + 9y^2$.

2). $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

2. Вычислить значение частной производной функции $z = \frac{x - y}{x + y}$ в точке *M(-2;3)*.

Решение:

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{2y}{(x + y)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = -\frac{2x}{(x + y)^2}.$$

В полученные выражения подставим x=-2 и y=3:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = z'_x(-2;3) = \frac{2 \cdot 3}{(-2 + 3)^2} = 6, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = z'_y(-2;3) = -\frac{2 \cdot (-2)}{(-2 + 3)^2} = 4.$$

3. Вычислить полный дифференциал функции $z = x^3 - 2x^2 y^2 + y^3$ в точке *M(1;2)*.

Решение:

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 4xy^2 ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4x^2 y + 3y^2 .$$

Вычислим значения частных производных в точке *M(1;2)*:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = z'_x(1;2) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2^2 = -13 , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = z'_y(1;2) = -4 \cdot 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 4 .$$

Согласно формуле (2), получим:

$$dz = -13dx + 4dy .$$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

I-В	II-В

1. Найти область определения функции:

I-В	II-В
$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;	$z = \dfrac{3}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$;

2. Найдите частное значение функции:

I-В	II-В
$f(x, y) = \dfrac{2x + y - 8}{x^2 + y - 1}$, в точках $A(0,0), B(2,1)$;	$f(x, y) = \dfrac{5x - 3y + 2}{x^2 - 4y - 1}$, в точках $A(0,0), B(2,1)$;

3. Запишите с помощью систем неравенств замкнутые области *D*, заданные следующим образом:

I-В	II-В
а). $y = x, y = x - 6, y = 3, y = -3$;	а). $y = x, y = x - 8, y = 4, y = -4$;
б). $y = x^2, y = 1$;	б). $y = x^2, y = 4$;

4. Найдите частные производные следующих функций:

I-В	II-В
а). $z = \dfrac{1}{3}x^3 - 2xy^2 + y^3$;	а). $z = \dfrac{1}{2}x^2 - 5xy^2 - 2y^3$;
б). $z = \dfrac{2(x^2 - y^2)}{2x + y}$;	б). $z = \dfrac{x^2 - 3y^2}{x + y}$;

5. Вычислите полные дифференциалы функций в заданных точках:

I-В	II-В
а). $z = x^3 y + xy^2 + xy^3$ в точке *M(-1;1)*;	а). $z = x^3 y^2 - 2xy^2 + xy^3$ в точке *M(-1;1)*;
б). $z = \dfrac{x^2 - 3y}{x - y}$ в точке *M(1;-2)*;	б). $z = \dfrac{2x^2 + y}{x - y}$ в точке *M(1;-2).*

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение функции n-переменных.
2. Введите определение области D.
3. Введите определение частной производной.
4. Определение полного дифференциала функции.
5. Объясните, как вы выполняли работу.
6. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа №11.
Тема: **Вычисление интегралов.**

Цель: Научить вычислять определенные интегралы, используя свойства и с помощью метода подстановки.

Краткие теоретические сведения:

- **Понятия неопределенного интеграла, его свойства**
- **Основные методы интегрирования**
- **Понятие определенного интеграла**

1. Понятия неопределенного интеграла, его свойства

В этом разделе будем заниматься задачей, обратной к задаче нахождения производной.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех x некоторого промежутка.

Например, функция x^3 является первообразной функции $3 \cdot x^2$, т.к. $\left(x^3\right)' = 3 \cdot x^2$. Функция $x^3 + 5$ также является первообразной функции $3 \cdot x^2$, т.к. $\left(x^3 + 5\right)' = 3 \cdot x^2$.

Поэтому, задача отыскания по данной функции $f(x)$ ее первообразной решается неоднозначно. Действительно, если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$, т.к. $\left(F(x) + C\right)' = f(x)$.

Определение: Множество всех первообразных функций $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Итак, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C = const$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)$
2. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$, где $C = const$.
3. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица основных неопределенных интегралов (см. приложение 3)

2. Основные методы интегрирования

2.1 Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

Примеры:

1) Вычислить интеграл

$$\int\left(5\cdot\cos x+2-3\cdot x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx$$

Решение: Применяя свойства 2 и 3 интеграла, получим,

$$\int\left(5\cdot\cos x+2-3\cdot x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=5\cdot\int\cos x+2\cdot\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx-4\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

Далее, используя формулы 7, 2, 1, 3, 13 таблицы интегралов, находим

$$=5\cdot\sin x+2\cdot x-3\cdot\frac{x^3}{3}+\ln|x|-4\cdot\operatorname{arctg}x+C=$$

$$=5\cdot\sin x+2\cdot x-x^3+\ln|x|-4\cdot\operatorname{arctg}x+C$$

Обычно все произвольные постоянные суммируют и обозначают одной буквой *C*.

Правильность полученного результата легко проверить дифференцированием.

2) Вычислить интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Решение: Интеграл табличный. Воспользуемся формулой 13, получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}\arcsin\frac{x}{4}+C$$

Непосредственно вычислить интегралы с помощью таблицы на практике удается довольно редко. Приходится предварительно подынтегральное выражение тождественно преобразовывать.

3) Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

Решение: Интеграл не табличный, поэтому преобразуем его.

Т.к. $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx +$$
$$+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

Получим два табличных интеграла, по формулам 10 и 11 находим

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

4) Вычислить интеграл

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx$$

Решение:

Т.к. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, то

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

2.2Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного, т.е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и получаем формулу интегрирования подстановкой

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Эта формула также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле.

Примеры:

1) Вычислить интеграл

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx$$

Решение:

$$\int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x}{4}, \\ dt = \dfrac{1}{4}dx, \\ \text{îòêóäà} \\ \mathrm{dx} = 4\cdot \mathrm{dt} \end{array} \right| = \int e^t \cdot 4dt = 4\cdot\int e^t dt = 4\cdot e^t + C = 4\cdot e^{\frac{x}{4}} + C$$

2) Вычислить интеграл

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$$

Решение:

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-3} = t, \\ \text{òîãäà} \\ x-3 = t^2, \\ x = t^2+3, \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}dx, \\ dx = 2\sqrt{x-3}dt = 2\cdot tdt \end{array} \right| = \int \left(t^3+3\right)\cdot t\cdot 2\cdot tdt = \int 2\cdot t^2\left(t^2+3\right)dt =$$

$$= \int\left(2\cdot t^4 + 6\cdot t^2\right)dt = \int 2\cdot t^4 dt + \int 6\cdot t^2 dt = 2\cdot\int t^4 dt + 6\cdot\int t^2 dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 6\cdot\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot t^5 + 2\cdot t^3 + C = \frac{2}{5}\cdot\left(\sqrt{x-3}\right)^5 + 2\cdot\left(\sqrt{x-3}\right)^3 + C = \frac{2}{5}\cdot(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2\cdot(x-3)^{\frac{3}{2}} + C$$

3) Вычислить интеграл

$$\int\cos(3\cdot x)dx$$

Решение:

$$\int \cos(3\cdot x)dx = \begin{vmatrix} 3\cdot x = t, \\ dt = 3dx, \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{vmatrix} = \int \cos t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\cdot\int \cos t dt = \frac{1}{3}\cdot\sin t + C = \frac{1}{3}\cdot\sin(3\cdot x) + C$$

4) Найти

$$\int x\cdot(x+2)^{100}dx$$

Решение:

$$\int x\cdot(x+2)^{100}dx = \begin{vmatrix} x+2=t, \\ x=t-2, \\ dt=dx \end{vmatrix} = \int (t-2)\cdot t^{100}dt = \int \left(t^{101} - 2\cdot t^{100}\right)dt =$$

$$= \int t^{101}dt - \int 2\cdot t^{100}dt = \frac{t^{102}}{102} - 2\cdot\frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - 2\cdot\frac{(x+2)^{101}}{101} + C$$

3. Понятие определенного интеграла

Определение: Если $F(x)+C$ – первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b)-F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ называется определенным интегралом и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)dx\text{, т.е.}\quad \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

где a – нижний предел,

b – верхний предел определенного интеграла

Последняя формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Все методы и свойства неопределенного интеграла применяются и при вычислении определенных интегралов.

Простейшие свойства определенного интеграла.

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла. При этом будем предполагать, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b].

1^0. *При перестановки пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

<u>*Пример:*</u> Найти $\int_3^1 x^2dx$.

Решение:

$$\int_3^1 x^2dx = -\int_1^3 x^2dx = -\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \left(-\frac{27}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}.$$

2^0. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Пример №1:

Найти: $\int_0^1 5dx$.

Решение:

$$\int_0^1 5dx = 5\int_0^1 dx = 5x\Big|_0^1 = 5(1-0) = 5.$$

Пример №2:

Найти: $\int_2^3 6x^2dx$.

Решение:

$$\int_2^3 6x^2dx = 6\int_2^3 x^2dx = 6*\frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = 2x^3\Big|_2^3 = 2(3^3-2^3) = 2*19 = 38.$$

3^0. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:*

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Пример: Найти: $\int_1^2 (5x^4+2x-8)dx$.

Решение:

$$\int_1^2 (5x^4+2x-8)dx =$$

$$= \int_1^2 5x^4dx + \int_1^2 2xdx - \int_1^2 8dx = 5*\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 + 2*\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5-1^5)+(2^2-1^2)-$$

$$-8(2-1) = 26$$

Подстановка в определенном интеграле.

Пример1:

Найти: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin xdx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение: Воспользуемся подстановкой u=$1-\cos x$, откуда $du = \sin xdx$. Затем найдем новые пределы интегрирования; подставляя в равенство u= $1-\cos x$ значения $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \pi$, соответственно получим $u_1 = 1-\cos\frac{\pi}{2} = 1$ и $u_2 = 1-\cos\pi = 2$. Запись решения выглядит так:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin xdx}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 1-\cos x, & u_1 = 1-\cos(\pi/2) = 1 \\ du = \sin xdx; & u_2 = 1-\cos\pi = 2 \end{vmatrix} = 2\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2} = 2\int\limits_{u_1}^{u_2} u^{-2}du = -2u^{-1}\Big|_1^2 = -1+2 = 1 \ .$$

Пример2:

Найти: $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx = \begin{vmatrix} t = 4x^3+1, & t_1 = 4*0^3+1 = 1 \\ dt = 12x^2dx, & \\ x^2dx = \frac{1}{12}dt; & t_2 = 4*1^3+1 = 5 \end{vmatrix} ==$$

$$\frac{1}{12}\int\limits_1^5 t^5 dt = \frac{1}{12} * \frac{t^6}{6}\Big|_1^5 = \frac{1}{72}(5^6 - 1^6) = 217 \ .$$

Пример3:

Найти: $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{5x^4+1}$.

Решение:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{5x^4+1} = \begin{vmatrix} t = 5x^4+1, t_1 = 5*0^4+1 = 1 \\ dt = 20x^3dx, t_2 = 5*1^4+1 \\ x^3dx = \frac{1}{20}dt; \end{vmatrix} = \frac{1}{20}\int\limits_1^6 \frac{dt}{t} = \frac{1}{20}\ln t\Big|_1^6 = \frac{1}{20}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{1}{20}\ln 6 \ .$$

Пример4:

Найти: $\int\limits_1^e \frac{3\ln^2 xdx}{x}$. Решение: $\int\limits_1^e \frac{3\ln^2 xdx}{x} = \begin{vmatrix} \ln x = t, t_1 = \ln 1 = 0 \\ \frac{dx}{x} = dt, t_2 = \ln e = 1 \end{vmatrix} = 3\int\limits_0^1 t^2dt = t^3\Big|_0^1 = 1$

.

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание: Вычислить неопределённые и определенные интегралы:

Вариант 1

1. $\int\left(4x^3 - 6x^2 - 4x + 3\right)\cdot dx$
2. $\int 3\left(2x^2 - 1\right)\cdot dx$
3. $\int 5x\sqrt{x}\cdot dx$
4. $\int 5^x dx$
5. $\int\left(4 - 3cosx\right)\cdot dx$

Вариант 2

1. $\int\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right)\cdot dx$
2. $\int x^3\cdot\left(1 + 5x\right)\cdot dx$
3. $\int x^{-\frac{2}{3}}\cdot dx$
4. $\int 4^x dx$
5. $\int\left(sinx + 5x^4\right)\cdot dx$

6. $\int \frac{6x^2dx}{(1-2x^3)^4}$

7. $\int \frac{\ell^x dx}{(\ell^x+1)^3}$

8. $\int_1^3 (5x^2-3x+9)dx$

9. $\int_1^e \frac{3dx}{x}$

10. $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$

11. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)dx}{1+4x^2}$

12. $\int_{2\sqrt{2}}^4 3x\sqrt{x^2-7}dx$

13. $\int_0^1 (e^x-1)e^x dx$

14. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

15. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

16. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{1-2\cos x}$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{2-\sin x}$

6. $\int \frac{x^3dx}{(5x^4+3)^5}$

7. $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}}$

8. $\int_2^3 (3x^2-2x+8)dx$

9. $\int_0^4 2\sqrt{xdx}$

10. $\int_0^3 6x^3(3x^4-1)^2 dx$

11. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

12. $\int_0^4 6x^2\sqrt{x^3-1}dx$

13. $\int_0^1 e^{x^2} xdx$

14. $\int_{-1}^2 \frac{6x^2dx}{(x^3-5)^2}$

15. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение неопределенного интеграла.
2. Введите определение определенного интеграла.
3. Какими способами вычисления вы пользовались при решении?
4. Объясните, как применяются методы интегрирования.
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

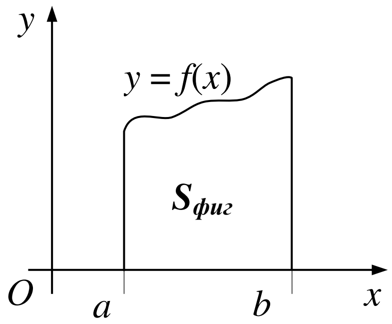
Практическая работа №12.

Тема: **Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла.**

Цель: Отработать навыки вычисления площадей плоских фигур с помощью интеграла.

Краткие теоретические сведения:

Определение: Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x \in [a;b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси OX.

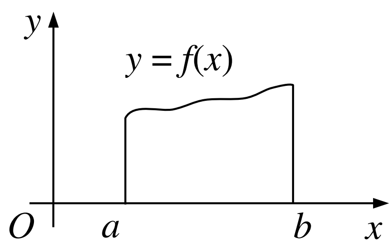


Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что он равен площади криволинейной трапеции. Итак,

$$S_{\text{фигуры}} = \int_a^b f(x)dx$$

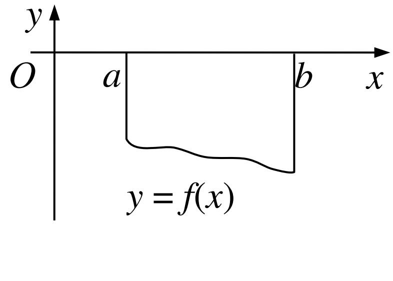
Рассмотрим основные типы задач на вычисление площадей.

1.



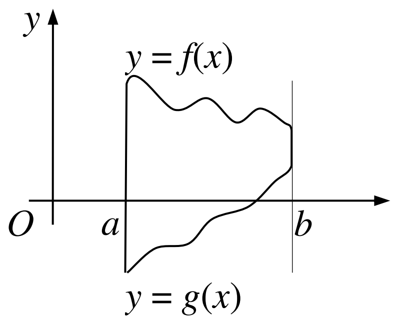
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2.



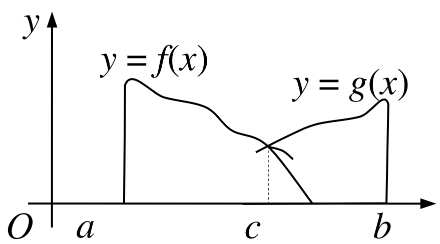
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

3.



$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

4.

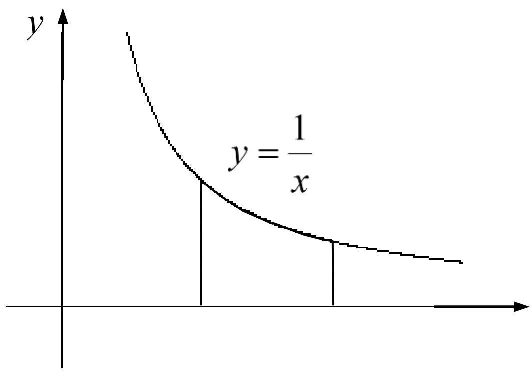


$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$

Примеры:

1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Решение: Построим данную фигуру и вычислим

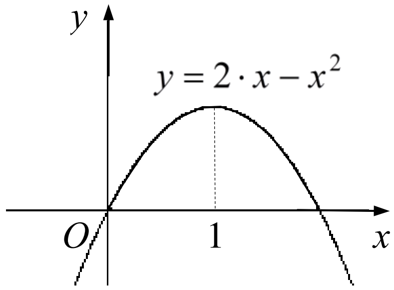


$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=$$
$$=\ln 2\approx 0{,}7 \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: $S\approx 0{,}7$ (кв.ед.)

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2\cdot x-x^2$ и $y=0$

Решение: Построим данную фигуру



Найдем точки пересечения параболы с OX :

$$2 \cdot x - x^2 = 0,$$

$$x \cdot (2 - x) = 0,$$

$$x = 0, \ x = 2.$$

Найдем координаты вершины параболы $(x_0; y_0)$,

$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$, $y_0 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$. Итак, $(1;1)$ – вершина.

$$S = \int_0^2 \left(2 \cdot x - x^2\right) dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right) =$$

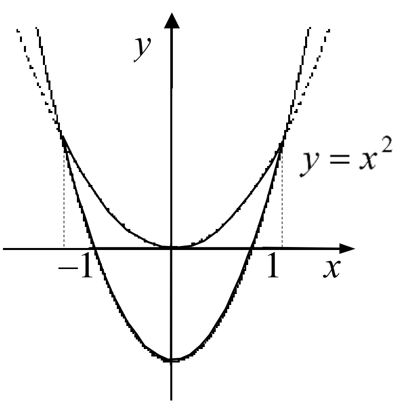
$$= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0 = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: $S = 1\frac{1}{3}$ (кв.ед.)

3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 \cdot x^2 - 1$ и $y = x^2$.

Решение: Построим сначала график функции $y = x^2$ с вершиной в точке $(0;0)$ и ветвями параболы, направленными вверх.

Затем построим график функции $y = 2 \cdot x^2 - 1$.



Найдем точки пересечения графиков функций. Для этого решим уравнение

$$2\cdot x^2-1=x^2,$$
$$x^2=1,$$
$$x=\pm 1$$

Из рассмотренных четырех типов задач на нахождение площадей плоских фигур, данная задача относится к третьему типу, следовательно

$$S=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx$$

$$S=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\left(2\cdot x^2-1\right)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2\cdot x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=$$
$$=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=$$
$$=2-\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}\ \text{(кв.ед.)}$$

Ответ: $S=1\frac{1}{3}$ (кв.ед.)

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

1). *x+2y-4=0, y=0, x=-3* и *x=2.*

Выполним построение фигуры. Строим прямую *x+2y-4 = 0* по двум точкам *A* (4; 0) и 5(0; 2) (рис. 6). Выразив *у* через *x,* получим *y=-0,5x+2.* По формуле (13.1), где *f(x)=-0,5x+2*, *a*=-3, *b* = 2, находим

$$S=\int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)dx=\left(-\frac{0{,}5x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-3}^{2}=\left(-0{,}25x^2+2x\right)\Big|_{-3}^{2}=-0{,}25*2^2+2*2-(-0{,}25*(-3)^2+$$
$$+2*(-3))=11{,}25(\textit{кв.ед})$$

В качестве проверки вычислим площадь трапеции M_1MNN_1 обычным путем. Находим: M_1M=f (-3)= -0,5(-3)+2 = 3,5, N_1N=f(2)= -0,5*2+2 = 1, M_1N_1= 5. Следовательно, *S*=0,5(3,5+1)*5=11,25 (кв. ед.).

2). *x-2y+4=0*, *x+y-5=0* и y=0.

Выполним построение фигуры (рис. 7). Построим прямую x— *2y* + 4 = 0: y=0, x=-4, A(-4;0); x = 0, y=2, B(0; 2). Построим прямую *x+y-5=0*: y=0, x=5, C(5;0); x = 0, y = 5, D(0; 5).

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+4=0 \\ x+y-5=0, x=2, y=3, M(2,3). \end{cases}$$

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник *AMC* (рис. 7) на два треугольника *AMN* и *NMC*, так как при изменении *x* от *A* до *N* площадь

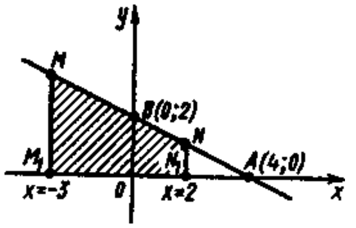


рис.6

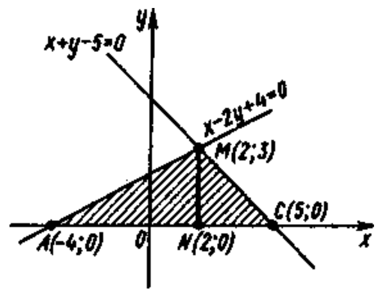


Рис.7

ограничена прямой x- 2y+4 = 0, а при изменении x от N до C- прямой $x+y-5=0$.

Для треугольника *AMN* имеем: $x-2y+4=0$; $y=0,5x+2$, т. е. $f(x)=0,5x+2$, $a=-4$ и $b=2$. Для треугольника *NMC* имеем: $x+y-5=0$, $y=-x+5$, т.е. $f(x)=-x+5$, a=2 и $b=5$.

Вычислив площадь каждого из треугольников и сложив результаты, находим:

$$S_{\Delta AMN}=\int_{-4}^{2}(0,5x+2)dx=\left(\frac{0,5x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-4}^{2}=9(кв.ед.)$$

$$S_{\Delta NMC}=\int_{2}^{5}(-x+5)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Bigg|_{2}^{5}=4,5(кв.ед.)$$

3). $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ и $x=3$.

В данном случае требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой .$y=x^2$, прямыми x=2 и x = 3 и осью *Ox* (рис.8). По формуле (13.1) находим

$$S=\int_{2}^{3}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{2}^{3}=6\frac{1}{3}(кв.ед.)$$

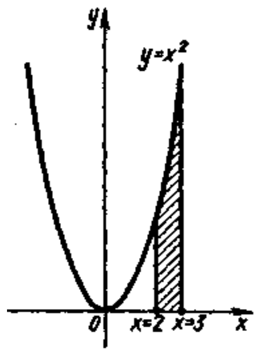
4). $y=-x^2+4$ и y=0.

Выполним построение фигуры (рис.9). Искомая площадь заключена между параболой $y=-x^2+4$ и осью *Ox*.

Найдем точки пересечения параболы с осью *Ox*. Полагая $y=0$, найдем $x=\pm 2$. Так как данная фигура симметрична относительно оси *Oy*, то вычислим площадь фигуры, расположенной справа от оси *Oy*, *и* полученный результат удвоим:

$$S_1 = \int_0^2 (-x^2+4)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right)\Bigg|_0^2 = 5\frac{1}{3}(кв.ед.);$$

$$S = 2S_1 = 2*5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}(кв.ед.)$$



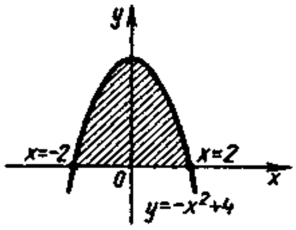


Рис. 76

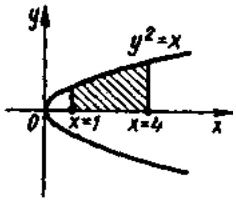


рис.8 рис.9 рис.10

5). $y^2=x$, $y\geq 0$, $x=1$ и $x=4$.

Здесь требуется вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной верхней ветвью параболы $y^2=x$, осью *Ox* и прямыми $x=1$ и $x=4$ (рис.10). По формуле (13.1), где $f(x)=\sqrt{x}$, $a=1$ и $b=4$, находим

$$S = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^4 = \frac{2x^{3/2}}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{2}{3}(8-1) = 4\frac{2}{3}(кв.ед.)$$

6). $y=Sinx$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi$.

Искомая площадь ограничена полуволной синусоиды и осью *Ox* (рис.11). Имеем

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1+1 = 2(кв.ед.)$$

7). $y = -\ 6x$, $y=0$ и $x = 4$.

Фигура расположена под осью *Ox* (рис.12). Следовательно, ее площадь находим по формуле (13.3):

$$S = \left| -\int_0^4 6xdx \right| = \left| \frac{6x^2}{2}\Bigg|_0^4 \right| = |-48| = 48(кв.ед.)$$

8). $y=(1/3)x^3$, $y=0$, $x=-1$ и $x=2$.

Кривую построим по точкам (рис.13). Фигура, ограниченная данными линиями, расположена по обе стороны от оси Ox. Таким образом, площадь фигуры находим по формуле (13.4):

$$S=\left|\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}x^3dx\right|+\int_{0}^{2}\frac{1}{3}x^3dx=\left|\frac{x^4}{12}\Big|_{-1}^{0}\right|+\frac{x^4}{12}\Big|_{0}^{2}=\left|-\frac{1}{12}\right|+\frac{16}{12}=1\frac{5}{12}\,(кв.ед.)$$

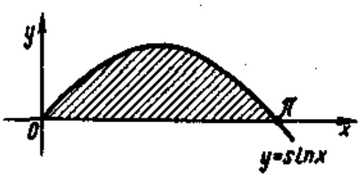


Рис.11

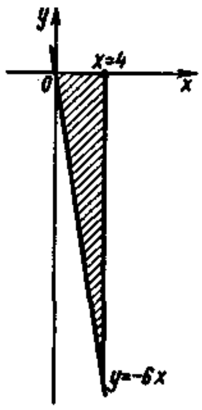


рис.12

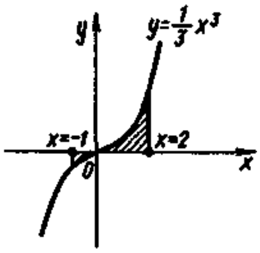


рис.13

10). $y = x^2$ и $y = 2x$.

Данная фигура ограничена параболой $y=x^2$ и прямой $y=2x$. Для определения точек пересечения заданных линий решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

откуда находим $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$ Используя для нахождения искомой площади формулу (13.5), получим

$$S=\int_0^2 (2x-x^2)dx=\left(\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}(кв.ед.)$$

11). $7x^2-9y+9=0$ и $5x^2-9y+27=0$.

Запишем уравнения парабол в виде $y=(7/9)x^2+1$ и $y=(5/9)x^2+3$ и построим эти параболы . Для нахождения точек их пересечения решим систему

$$\begin{cases} y=(7/9)x^2+1 \\ y=(5/9)x^2+3 \end{cases}$$

откуда $x_1, = -3$, $x_2 = 3$. Так как фигура симметрична относительно оси *Oy,* то найдем половину ее площади, взяв пределы интегрирования от 0 до 3, и результат удвоим:

$$S_1=\int_0^3\left(\left(\frac{5}{9}x^2+3\right)-\left(\frac{7}{9}x^2+1\right)\right)dx=\int_0^3\left(2-\frac{2}{9}x^2\right)dx=2\left(x-\frac{x^3}{27}\right)\Big|_0^3=2(3-1)=4(кв.ед.)$$

$S=2S_1=8$(кв.ед.).

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

I-В

1). $y=x^2+2x+1$, $y=1-x$, Ox;
2). $y=x^2+1$, $y=3-x$;
3). $y=\sqrt{x}$, $y=x$;
4). $y=3x^2$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$;
5). $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$;

II-В

1). $y=4-x^2$, $y=x+2$, Ox;
2). $y=x^2-4x+3$, Ox;
3). $y=2-x^2$, $y=x+2$;
4). $y=-x^2-2x+8$, $y=0$;
5). $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=4-x$;

III-В

1). $y=x^3$, $y=2x-x^2$, Ox;
2). $y=x^2+4x+4$, $y=x+2$;
3). $y=6x^2$, $y=(x-3)(x-4)$, Ox;
4). $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$;
5). $y=2x-x^2$, $y=x$;

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение криволинейной трапеции.
2. Введите виды плоских фигур.
3. Формулы для нахождения площадей плоских фигур.
4. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№13.

Тема: **Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными.**

Цель: отработать навыки решения дифференциальных уравнений I-ого порядка с разделяющими переменными и умения находить их общие и частные решения;

Краткие теоретические сведения:

- **Основные понятия дифференциальных уравнений.**
- **Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными.**
- **Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.**

1. Основные понятия дифференциальных уравнений.

Определение1: Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные от искомой величины или ее дифференциалы. $\left(y' = \dfrac{dy}{dx} \right)$.

Пример: $y' = 8x$ или $xdy = 2ydx$.

Определение2: Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию от х, которая удовлетворяет данному уравнению, то есть обращает это уравнение в тождество при подстановке ее в уравнение вместо у.

Определение3: Уравнение, содержащее производную или дифференциалы не выше первого порядка, называются дифференциальными уравнениями I порядка.

Пример: $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

$y = x^2 + C$ - общее решение уравнения,

при $x = 1, y = 3 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow$

$y = x^2 + 2$ - частное решение

Введем определение общего и часного решений дифференциального уравнений:

Определение4: 1). Решение, содержащее произвольную постоянную С, называется общим.

2). Решение, в которое подставлена произвольная постоянная С, называется частным решением.

3). Данные х и у называются начальными условиями.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными.

Определение5: Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, где $f(x) è \varphi(y)$ -данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными.*

Это уравнение можно записать в виде: $f(x)dx = -\varphi(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов.
Решать такое уравнение необходимо с помощью интегрирования левой и правой части.
Примеры:

1). $xdx + ydy = 0, xdx = -ydy, \int xdx = \int(-ydy), \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C, y^2 = 2C - x^2$ - общее решение в неявной форме.

$y = \sqrt{2C - x^2}$ - решение в явном виде.

2). $2ydy = 3x^2dx, \int 2ydy = \int 3x^2dx, y^2 = x^3 + C$ - общее решение в неявной форме.

$y = \sqrt{x^3 + C}$ - решение в явном виде.

3). $2ydy = (1-3x^2)dx, \int 2ydy = \int(1-3x^2)dx, y^2 = x - x^3 + C$ -общее решение в неявной форме.

$y = \sqrt{x - x^3 + C}$ - решение в явном виде.

4). Найти частное решение дифференциального уравнения:

$dy = (x^2 - 1)dx$, если y=4 при x=1.

Решение:

$\int dy = \int(x^2 - 1)dx, y = \frac{x^3}{3} - x + C$ - общее решение.

Подставим $4 = \frac{1}{3} - 1 + \tilde{N}, \tilde{N} = \frac{14}{3}$, тогда $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$ - частное решение.

5). $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}, \int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x-1}, \ln|y+1| = \ln|x-1| + C, \ln|y+1| = \ln|x-1| + \ln C,$.
$y + 1 = C(x-1)$

3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение6: Уравнение вида $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0$,
где $f(x), F(y), \varphi(x), \Phi(y)$ - заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Алгоритм решения:

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частные решения.

Примеры:

а). Найти общее решение дифференциальных уравнений.

1). $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$

1. Производная выражена через дифференциалы.
2. $x(y^2-1)dx=-y(x^2+1)dy$.
3. $\dfrac{xdx}{x^2+1}=-\dfrac{ydy}{y^2-1}$.
4. $\int\dfrac{xdx}{x^2+1}=-\int\dfrac{ydy}{y^2-1}$

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\left[x^2+1=t,2xdx=dt,xdx=\frac{dt}{2}\right]=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C_1$$

$$-\int\frac{xdx}{y^2-1}=\left[y^2-1=t,2ydy=dt,ydy=\frac{dt}{2}\right]=-\int\frac{dt}{2t}=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln|y^2-1|+C_2$$

Пусть $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}\ln C$, тогда

$$\frac{1}{2}\ln|x^2+1|=-\frac{1}{2}\ln|y^2-1|+\frac{1}{2}\ln C,$$

$$(x^2+1)(y^2-1)=C$$

2). $y'=xy^2$.

1. Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=xy^2\ .$$

2. $dy=xy^2dx$.
3. $\dfrac{dy}{y^2}=xdx$.
4. $\int\dfrac{dy}{y^2}=\int xdx, -\dfrac{1}{y}=\dfrac{x^2}{2}+\tilde{N},\ y=-\dfrac{2}{x^2+C}$.

3). $(1+x^2)dy-2xydx=0$

1. Производная выражена через дифференциалы.
2. $(1+x^2)dy=2xydx$.
3. $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{2xdx}{1+x^2}$.
4. $\int\dfrac{dy}{y}=\int\dfrac{2xdx}{1+x^2}$

$$\int\frac{2xdx}{1+x^2}=\left[1+x^2=t,2xdx=dt\right]=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C_1=\ln|x^2+1|+C_1$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_2,$$

Пусть $C_1 = C_2 = \ln C$, тогда

$$\ln\left|x^2+1\right| = \ln|y| + \ln C,$$

$$(x^2+1) = y \cdot C,$$

$$y = \frac{x^2+1}{C}$$

4). $1 + y' + y + xy' = 0$ **.**

1. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, получим:

$$1 + \frac{dy}{dx} + y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

2. Умножим все уравнение на dx:

$$dx + dy + ydx + xdy = 0.$$

Сгруппируем: $(1+x)dy + (1+y)dx = 0$.

Запишем полученные выражения в разных частях: $(1+x)dy = -(1+y)dx$

3. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}.$$

4. Интегрируем обе части: $\int \frac{dy}{1+y} = -\int \frac{dx}{1+x}$.

$$\int \frac{dy}{1+y} = -\int \frac{dx}{1+x}, \ln|1+y| = -\ln|1+x| + \ln C, 1+y = \frac{C}{1+x}, y = \frac{C}{1+x} - 1.$$

б). Найдите частное решение:

1). $2ydx = (1+x)dy$, если y=4, x=1.

1. Производная выражена через дифференциалы.
2. $2ydx = (1+x)dy$
3. $\frac{2dx}{1+x} = \frac{dy}{y}$.
4. $\int \frac{2dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y}, 2\ln|1+x| = \ln|y| + C, \ln(1+x)^2 = \ln|y| + \ln C, (1+x)^2 = Cy$,
5. Так как y=4 и x=1, то $(1+1)^2 = C \cdot 4, 4 = 4\tilde{N}, \tilde{N} = 1$.

Значит частное решение при C=1 имеет вид: $y = (1+x)^2$.

2). $(1+x^3)dy = 3x^2 ydx$, если y=2, x=0

1. Производная выражена через дифференциалы.
2. $(1+x^3)dy = 3x^2 ydx$ **.**

3. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{3x^2dx}{1+x^3}$.

4. $\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{3x^2dx}{1+x^3}$

$$\int \frac{3x^2dx}{1+x^3} = \left[1 + x^3 = t, 3x^2dx = dt\right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln\left|1 + x^3\right| + C_1,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_2, \ln|y| = \ln\left|1 + x^3\right| + \ln C, \; y = C \cdot (1 + x^3)$$

5. Так как y=2, x=0, то:

$2 = C \cdot (1 + 0^3), \tilde{N} = 2$.

Значит частное решение при С=2 имеет вид: $y = 2(1 + x^3)$.

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

Вариант № 1:

1. Найдите общее решение уравнений:

1). $dx = (4y - 3)dy$

2). $ydx = 2xdy$

3). $x^2dx + ydy = 0$

4). $dy + xdx = 2dx$

5). $(y+1)dx = 2xdy$

6). $(1 + x^2)dy - (xy + x)dx = 0$

7). $y' = y^2 \cos x$

8). $ydx - dx + xdy = 0$

2. Найдите частные решения уравнений:

1). $\dfrac{2dy}{dx} = 1 + x^2$, если $x = 0, y = 0$

2). $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$,

если $x = 0, y = 1$

3). $y' + \dfrac{tgx}{ctgy} = 0$,

Вариант № 2:

1. Найдите общее решение уравнений:

1). $dx = (5y + 1)dy$

2). $4ydx = xdy$

3). $xdx + y^2dy = 0$

4). $ydy + dx = 2dy$

5). $(5y - 1)dx = xdy$

6). $(y - x^2y)dy + (x + xy^2)dx = 0$

7). $y' - y - 1 = 0$

8). $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0$

2. Найдите частные решения уравнений:

1). $\dfrac{2dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = 0$, если $x = 0, y = \sqrt{2}$

2). $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$,

если $x = 0, y = 4$

3). $ydx + ctgxdy = 0$,

если $y=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{3}$. если $y=-1, x=\frac{\pi}{3}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте понятие дифференциального уравнения.
2. Введите понятие частного и общего решений.
3. Сформулируйте отличие дифференциального уравнения с разделенными и разделяющими переменными..
4. Объясните на своих уравнениях алгоритм решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа№14.

Тема: **Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения.**

Цель: отработать навыки решения дифференциальных уравнений I-ого порядка и умения находить их общие и частные решения;

Краткие теоретические сведения:

- **Основные понятия.**
- **Решение линейных дифференциальных уравнений методом Бернулли.**
- **Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.**

1. Основные понятия.

Определение: Уравнение вида $y' + py = q$, где p и q - функции переменной x или постоянные величины, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Замечание: Уравнение называется линейным, так как искомая функция y и ее производная y' входят в это уравнение в первой степени.

Примеры: а). $y' + \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, б). $y'' + 2xy = 0$, в). $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$.

Решение: Уравнение а). является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, так как y и y' входят в первой степени, а $p = \dfrac{2}{x+1}, q = (x+1)^3$.

Уравнения б). и в). не являются линейными, так как они содержат y^2 и y''.

2. Решение линейных дифференциальных уравнений методом Бернулли.

Чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью ($q \neq 0$), нужно свести к уравнению с разделяющимися переменными.

При решении таких уравнений применяют *метод Бернулли*. Для этого используют подстановку $y = uv$, в результате которой уравнение $y' + py = q$ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$u' + pu = 0; uv' = q$, где u и v - новые функции переменной x.

Одну из этих функций подбирают так, чтобы уравнение, содержащее другую функцию, стало уравнением с разделяющимися переменными.

Примеры: Решить уравнения.

1). $y' - \frac{3}{x} y = x$**.**

Решение:

Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим у и y' в исходное уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x} uv = x,$$

$$u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) + u'v = x.$$

Обозначим: $u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) + u'v = x.$ **(1)**

Приравняем к 0 коэффициент при u:

$$\left(v' - \frac{3}{x} v\right) = 0.$$

Разделим переменные в полученном уравнении:

$$v' - \frac{3}{x} v = 0, \frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x}, \frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}.$$

Проинтегрируем полученное выражение, при этом пусть С=0:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3dx}{x}, \ln v = 3\ln x, v = x^3.$$

Подставим найденное значение $v = x^3$ в уравнение (**1**):

$$u'x^3 = x.$$

Решим это уравнение разделяя переменные:

$$\frac{du}{dx} x^3 = x, du = \frac{dx}{x^2}, \int du = \int \frac{dx}{x^2}, u = -\frac{1}{x} + C.$$

Подставим $v = x^3$ и $u = -\frac{1}{x} + C$ в $y = uv$, получим:

$$y = \left(C - \frac{1}{x}\right) x^3.$$

2). $y' + ytgx = \cos^2 x$**.**

Решение:

Пусть $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим у и y' в исходное уравнение:

$$u'v + uv' + uvtgx = \cos^2 x,$$

$$u'v + u(v' + vtgx) = \cos^2 x.$$

Обозначим: $u'v + u(v' + vtgx) = \cos^2 x.$ **(2)**

Приравняем к 0 коэффициент при u:

$$(v' + vtgx) = 0$$

Разделим переменные в полученном уравнении:

$$v' + vtgx = 0, \frac{dv}{dx} = -vtgx, \frac{dv}{v} = -tgxdx.$$

Проинтегрируем полученное выражение, при этом пусть С=0:

$\int \frac{dv}{v} = -\int tgx dx, \ln|v| = \ln|\cos x|, v = \cos x$.

Подставим найденное значение $v = \cos x$ в уравнение (**2**):

$u' \cos x = \cos^2 x.$

Решим это уравнение разделяя переменные:

$\frac{du}{dx}\cos x = \cos^2 x, du = \cos x dx, \int du = \int \cos x dx, u = \sin x + C$.

Подставим $v = \cos x$ и $u = \sin x + C$ в $y = uv$, получим:

$y = (\sin x + C)\cos x$.

Из рассмотренных примеров легко установить ***алгоритм решения*** линейного дифференциального уравнения первого порядка:

1. Приводят уравнение к виду $y' + py = q$.
2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + uv'$ и подставляют эти значения в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносит одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках к 0 и решив полученное уравнение.
4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$.
6. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

3). $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$.

Решение:

1. Приведем уравнение к виду $y' + py = q$:

   Разделим все члены уравнения на $\cos x$:

   $$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{\cos x}.$$

2. Полагаем $y = uv$; $y' = \frac{dy}{dx} = u'v + uv'$.

   Подставляя выражения, имеем:

   $$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}$$

   или

   $$u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{\cos x}. \quad \mathbf{(3)}$$

3. Пусть $v' + vtgx = 0$.

   Решим его, разделив переменные и проинтегрировав (C=0):

$$\frac{dv}{dx}+vtgx=0,\frac{dv}{dx}=-vtgx,\frac{dv}{v}=-tgxdx,\int\frac{dv}{v}=-\int tgxdx,\ln v=\ln\cos x,$$

$v=\cos x.$

4. Подставим в уравнение **(3)**, получим:

$$u'\cos x=\frac{1}{\cos x}.$$

Решим его, разделив переменные:

$$\frac{du}{dx}\cos x=\frac{1}{\cos x},\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x},du=\frac{dx}{\cos^2 x},\int du=\int\frac{dx}{\cos^2 x},u=tgx+C.$$

5. Подставим выражения для найденных функций u и v в равенство $y=uv$:

$$y=(tgx+\tilde{N})\cos x.$$

4). $\frac{y'}{x}-2y=(1-x^2)e^{x^2}$ **.**

Решение:

1. Приведем уравнение к виду $y'+py=q$:

Умножим все члены уравнения на x:

$$y'-2yx=(x-x^3)e^{x^2}.$$

2. Полагаем $y=uv$; $y'=\frac{dy}{dx}=u'v+uv'$.

Подставляя выражения, имеем:

$$u'v+uv'-2xuv=(x-x^3)e^{x^2}$$

или

$$u'v+u(v'-2xv)=(x-x^3)e^{x^2} \quad \mathbf{(4)}$$

3. Пусть $v'-2xv=0$

Решим его, разделив переменные и проинтегрировав (C=0):

$$\frac{dv}{dx}-2xv=0,\frac{dv}{v}=2xdx,\int\frac{dv}{v}=2\int xdx,\ln v=x^2,v=e^{x^2}.$$

4. Подставим в уравнение **(3)**, получим:

$$u'e^{x^2}=(x-x^3)e^{x^2}.$$

Решим его, разделив переменные:

$$u'=x-x^3,\frac{du}{dx}=x-x^3,du=(x-x^3)dx,\int du=\int(x-x^3)dx,u=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C$$

5. Подставим выражения для найденных функций u и v в равенство $y=uv$:

$$y=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C\right)e^{x^2}.$$

3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

5). $y' - \frac{2}{x} y = x^4$, если $x = 1, y = \frac{4}{3}$.

1. Уравнение в виде $y' + py = q$.

2. Полагаем $y = uv$; $y' = \frac{dy}{dx} = u'v + uv'$.

Подставляя выражения, имеем:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x} uv = x^4$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x} v\right) = x^4 \quad \textbf{(5)}$$

3. Пусть $v' - \frac{2}{x} v = 0$

Решим его, разделив переменные и проинтегрировав (C=0):

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v = 0, \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}, \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}, \ln v = 2\ln x, v = x^2$$

4. Подставим в уравнение **(5)**, получим:

$$u'x^2 = x^4$$

Решим его, разделив переменные:

$$\frac{du}{dx} x^2 = x^4, du = x^2 dx, \int du = \int x^2 dx, u = \frac{x^3}{3} + C$$

5. Подставим выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right) x^2.$$

6. Так как $x = 1, y = \frac{4}{3}$.

Найдем С:

$$\frac{4}{3} = \left(\frac{1^3}{3} + C\right) 1^2, C = 1.$$

Следовательно частное решение имеет вид:

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right) x^2 \text{ или } y = \frac{x^5}{3} + x^2.$$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

Вариант № 1: Вариант № 2:

1. Найдите общее решение уравнений:

1). $y' - 2y = 3$

2). $xy' + 2y = x^2$

3). $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

4). $\frac{y'}{(x+1)^3} - \frac{2y}{(x+1)^4} = 1$

5). $(1+x^2)y' - xy = 2x$

1). $y' - y = 1$

2). $xy' + x^2 y = x^2$

3). $\frac{dy}{dx} - yctgx = \sin x$

4). $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

5). $y'x + 2y = x^3$

2. Найдите частные решения уравнений:

1). $xy' + y = x^2$, если $x = 1, y = 2$

2). $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$,
если $x = 0, y = 0$

3). $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x \cdot x^3$,
если $y = e, x = 1$.

1). $xy' - y = x^3$, если $x = 1, y = \frac{1}{2}$

2). $\frac{dy}{dx} - ytgx = \frac{1}{\cos^3 x}$,
если $x = 0, y = 0$

3). $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$,
если $y = 1, x = 2$.

Вопросы для защиты:

1. Основные понятия дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Решение линейных дифференциальных уравнений методом Бернулли на своих уравнениях.
3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Практическая работа№15.

Тема: **Решение дифференциальных уравнений первого порядка.**

Цель: отработать навыки решения дифференциальных уравнений I-ого порядка и умения находить их общие и частные решения;

Задания:

Вариант 1.

1). $x(y^2-6)dx-4y(x^2-1)dy=0$

2). $3ydx=(1+x)dy$, если y=2, x=-1

3). $(1+x^3)dy=2x^2ydx$, если y=-2, x=1

4). $\frac{y'}{(x+1)^3}-\frac{2y}{(x+1)^4}=1$

5). $\frac{dy}{dx}-\frac{3y}{x}=e^x\cdot x^3$, если y=$e$, x=1.

Вариант 2.

1). $x(y^2-2)dx+4y(x^2+1)dy=0$

2). $5ydx=(1-x)dy$, если y=1, x=-2

3). $(1+x^4)dy=2x^3ydx$, если y=0, x=1

4). $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$

5). $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$, если y=1, x=2.

Практическая работа№16.

Тема: **Численные ряды, сходимость и расходимость рядов. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена.**

Цель: отработать навыки нахождения элементов ряда с помощью n-ого члена, научить исследовать ряды на сходимость, раскладывать элементарные функции в ряд Маклорена.

Краткие теоретические сведения:

- **Основные понятия численных рядов.**
- **Необходимый признак сходимости числовых рядов.**
- **Достаточные признаки сходимости рядов.**
- **Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.**
- **Степенные ряды.**
- **Разложение функций в степенные ряды.**

1. Основные понятия численных рядов.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность.

Элемент u_n называется общим элементом ряда.

Обозначим сумму n-первых элементов ряда через S_n, т.е.

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

При изменении n меняется и S_n.

Возможно 2 случая:

1. Величина S_n при $n \to \infty$ имеет предел S, т.е $\lim\limits_{x \to \infty} S_n = S$

в этом случае ряд называется сходящимся.

2. Величина S_n при $n \to \infty$ предела не имеет или предел ее равен ∞. Тогда ряд называется расходящимся.

Примеры:

1). Дан ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...$

Исследуем его на сходимость.

Ряд составлен из элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, значит $S_n=\frac{b_1}{1-q}$.

Вычислим , $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, следовательно, ряд сходится .

2). Записать ряд по его заданному общему члену: а). $u_n=\frac{n+1}{2^n}$; б). $u_n=\frac{n+2}{2n-1}$;

в). $u_n=\frac{3^n}{n!}$.

Решение:

1). Полагая $n=1$, $n=2$, $n=3$, …, имеем бесконечную последовательность чисел: $u_1=\frac{1+1}{2^1}=\frac{2}{2}$, $u_2=\frac{2+1}{2^2}=\frac{3}{4}$, $u_3=\frac{3+1}{2^3}=\frac{4}{8}$,…. Сложив его члены, получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+...+\frac{n+1}{2^n}+....$$

2). Полагая $n=1$, $n=2$, $n=3$, …, имеем бесконечную последовательность чисел:

$u_1=\frac{1+2}{2*1-1}=\frac{3}{1}, u_2=\frac{2+2}{2*2-1}=\frac{4}{3}, u_3=\frac{3+2}{2*3-1}=\frac{5}{5},...$. Сложив его члены, получим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n-1}=\frac{3}{1}+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+...+\frac{n+2}{2n-1}+....$$

3). Выражение вида $n!$- называется n-факториалом.

1!=1 (Один-факториал.)

2!=1*2=2 (Два-факториал.)

3!=1*2*3=6 (Три-факториал.)

…

$n!=1*2*3*…*n$,

$(n+1)!=1*2*3*…*n*(n+1)$,

…

Найдем члены ряда:

$u_1=\frac{3^1}{1!}=\frac{3}{1}, u_2=\frac{3^2}{2!}=\frac{9}{1*2}, u_3=\frac{3^3}{3!}=\frac{27}{1*2*3},...$

Получим ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=\frac{3}{1}+\frac{9}{1*2}+\frac{27}{1*2*3}+...+\frac{3^n}{n!}+....$

3). Найти n-й член ряда, по данным его первым членам: а). $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$;

б).$1+\frac{\sqrt{2}}{1*2}+\frac{\sqrt{3}}{1*2*3}+\ldots$; в). $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\ldots$.

Решение:

а). Знаменатели членов ряда , начиная с третьего , являются нечетными числами, следовательно, n-й член ряда имеет вид: $\frac{1}{2n+1}$.

б). Числители членов ряда представляют собой квадратные корни из натуральных чисел, а их соответствующие знаменатели равны $n!$, следовательно общий член ряда имеет вид: $\frac{\sqrt{n}}{n!}$.

в). Числители членов ряда образуют натуральный ряд чисел, а соответствующие им знаменатели- натуральный ряд чисел, начиная с 3 , значит n-й член ряда имеет вид:

$$\frac{n}{n+2}.$$

2. Необходимый признак сходимости числовых рядов.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ может сходиться только при условии , что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю:
$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ - *<u>необходимый признак сходимости ряда</u>*.

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится- это достаточный признак расходимости ряда.

3. Достаточные признаки сходимости рядов.

1. <u>Признак сравнения рядов.</u>

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто ***геометрический ряд*:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \quad (a>0),$$

который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, и

гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$ являющийся расходящимся.

А также ***обобщенный гармонический ряд:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

Если p=1, то данный ряд ряд обращается в гармонический ряд, который является расходящимся.

Если p<1, то члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда и, значит, он расходится.

Если p>1, то ряд сходится.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *, то данный ряд сходится, если* $\ell < 1$ *и расходится, если* $\ell > 1$.

Признак Даламбера не дает ответа, если $\ell = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Примеры: Исследуйте ряды на сходимости.

1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)*2^n}$.

Решение:

Распишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)*2^n} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{3*2^n} + \frac{1}{5*2^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2^n} + \ldots$.

а). Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n} = 0$. Значит необходимый признак выполняется.

б). Применим достаточный признак сходимости: признак сравнения. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, который сходится, т.к. $q=1/2<1$.

Сравним члены данного ряда , начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3*2^2} < \frac{1}{2^2}; \frac{1}{5*2^3} < \frac{1}{2^3}; \ldots; \frac{1}{(2n-1)2^n} < \frac{1}{2^n}; \ldots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственного меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Решение:

Распишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$.

а). Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$. Значит выполняется достаточный признак расходимости ряда, следовательно ряд расходится.

3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$.

<u>Решение:</u>

Распишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2*1}{5^1} + \frac{2*2}{5^2} + \frac{2*3}{5^3} + ... + \frac{2n}{5^n} + ...$

а). Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{5^n} = 0$. Значит необходимый признак сходимости выполняется.

б). Применим достаточный признак сходимости Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}}{\frac{2n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{5*5^n} * \frac{5^n}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right) = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right) = \frac{1}{5} < 1$$

Следовательно, данный ряд сходится.

4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

<u>Решение:</u>

Распишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1*2}{3^2} + \frac{1*2*3}{3^3} + ... + \frac{n!}{3^n} + ...$.

а). Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} = 0$

б). Применим достаточный признак сходимости ряда, признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{3^{n+1}} : \frac{n!}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1*2*...*n*(n+1)}{3*3^n} * \frac{3^n}{1*2*...*n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3}\right) = \infty > 1$$

Значит ряд расходится.

5). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

Распишем ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}}+...$

а). Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=0$

б). Применим достаточный признак сходимости: признак сравнения. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом:

$1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+...+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+...$,

который сходится, так как p=3/2>1, следовательно сходится и данный ряд.

4. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Числовой ряд

$u_1+u_2+...+u_n+...$ (1)

называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд (1) называется *знакочередующимся*, если любые, стоящие рядом члена имеет противоположные знаки.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n *стремится к нулю при* $n\to\infty$*, то ряд (1) сходится.*

Этот признак является достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд:

$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...$ (2),

составленный из абсолютных величин его членов.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд (2)- расходится, то данный ряд называется условно сходящимся.

При исследовании ряда (2) используют признаки сравнения и Даламбера.

Если ряд (2)- сходится, то знакочередующийся ряд абсолютно сходится, если ряд (2) расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно.

<u>Примеры:</u>

Исследовать ряды на сходимость(абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$

Решение:

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$

И $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится.

Выясним, сходится он абсолютно или условно.

Ряд

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$,

составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является гармоническим рядом, который всегда расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

2). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+...+(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}+...$

Решение:

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$1>\frac{2}{3}>\frac{3}{5}>\frac{4}{7}>...$,

но $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$.

Ряд расходится, так как признак Лейбница не выполняется.

3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+...$

Решение:

Используя признак Лейбница, получим:

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>...$

и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$. Значит ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$.

Это геометрический ряд вида: $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n,(q=1/2)$, который сходится.

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

4). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+...$

Решение:

Используя признак Лейбница, получим:

$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{4}}>...$

и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Значит рад сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ или $1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}+...+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+...$

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как p=1/2<1. Следовательно, данный ряд сходится условно.

5). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}=-\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+...+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}+...$

Решение:

Используя признак Лейбница, получим:

$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2}>\frac{3}{2^3}>...$

и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$. Значит рад сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+...+\frac{n}{2^n}+...$

Исследуем этот ряд на сходимость с помощью признака Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}-?$

$u_n=\frac{n}{2^n};u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{2\cdot n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$, значит ряд сходится.

Следовательно исходный ряд сходится абсолютно.

6). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-1)^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-1)^2}+...$

Решение:

Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают:

$\frac{1}{2^2}>\frac{1}{5^2}>\frac{1}{8^2}>...$

И $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}=0$.

Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$$

Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим p=2>1:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

$\frac{1}{2^2}<1; \frac{1}{5^2}<\frac{1}{2^2}; \frac{1}{8^2}<\frac{1}{3^2}$, так как обобщенный гармонический ряд сходится, то и ряд, составленный из абсолютных величин, тоже сходится.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

5. Степенные ряды.

Пусть дан ряд:

$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$, членами которого служат не числа, а функции аргумента x. Такой ряд называется *функциональным.*

<u>Пример:</u> $1+x^1+x^2+\ldots+x^n+\ldots, n=0,1,\ldots$

Если x дать какое-либо значение, то функциональный ряд превратится в числовой.

Определение: Совокупность значений, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4),$$

где числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называют *коэффициентами ряда,* а член $a_n x^n$ *-общим членом* ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при который данный ряд сходится.

Число R называется *радиусом сходимости* ряда (4), если при $|x|<R$ ряд сходится и при том абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится.

Радиус сходимости ряда можно найти, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1.$$

Значит, если существует предел

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|(a_n\neq 0, n=1,2,\ldots) \qquad (*),$$

то радиус сходимости ряда R равен этому пределу и ряд (4) сходится при $|x|<R$, то есть в промежутке $-R<x<R$, который называется *промежутком (интервалом) сходимости.*

Если предел (*) равен 0 ($R=0$), то ряд (4) сходится в единственной точке x=0.

На концах промежутка ряд может сходиться (абсолютно или условно), но может и расходится. Сходимость ряда (4) при $x=-R$ и $x=R$ исследуется с помощью какого-либо признаков сходимости.

Примеры:

1). Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n = \frac{1}{3}x+\frac{2}{3^2}x^2+\frac{3}{3^3}x^3+...+\frac{n}{3^n}x^n+...$.

Исследовать его сходимость в точках x=1,x=3, x=-2.

Решение:

а). При x=1 данный ряд превращается в числовой ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}+...$$

Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$$

Исследуем сходимость данного ряда по признаку Даламбера:

$$u_n=\frac{n}{3^n};u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}};\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{3n},$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$, то есть ряд сходится.

б). При x=3 получим ряд:

$$\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3^2}\cdot 3^2+\frac{3}{3^3}\cdot 3^3+...+\frac{n}{3^n}\cdot 3^n+...$$

или $1+2+3+...+n+...$,

который расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}n\neq 0.$$

3). При x=-2 получим:

$$\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3^2}\cdot(-2)^2+\frac{3}{3^3}\cdot(-2)^3+...+\frac{n}{3^n}\cdot(-2)^n+...$$

или $-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3^2}\cdot 2^2-\frac{3}{3^3}\cdot 2^3+...+(-1)^n\frac{n}{3^n}\cdot 2^n+...$.

Который сходится, согласно признаку Лейбница(члены ряда, взятые по абсолютной величине, монотонно убывают и предел n-ого члена равен 0).

2). Найти промежуток сходимости степенного ряда:

а). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$

Решение:

Используя формулу (*) получим:

$$a_n=\frac{1}{n!},a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)n!};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1; R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

Следовательно промежуток сходимости есть $-\infty < x < \infty$, то есть данный ряд сходится на всей числовой оси.

б). $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n = 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$

Решение:

Используя формулу (*) получим:

$a_n = n!, a_{n+1} = (n+1)! = (n+1)n!$;

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}; R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Значит ряд сходится только в одной точке 0.

в). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} = x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \ldots$

Решение:

Используя формулу (*) получим:

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}; R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно данный ряд сходится абсолютно при $-1 < x < 1$. Исследуем сходимость ряда в точках x=-1 и x=1.

При x=-1 имеем ряд:

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Это знакочередующийся ряд, который в силу признака Лейбница сходится.

При x=1 имеем ряд:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

или $1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} + \ldots$.

Это обобщенный гармонический ряд, который расходится так как p=1/2<1.

Отсюда следует, что данный ряд сходится при $-1 \le x < 1$.

г). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n^2} + \ldots$

Решение:

Используя формулу (*) получим:

$a_n = \frac{1}{n^2}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$;

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2; R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right|=1,$$

Значит ряд сходится на промежутке $-1<x<1$

Исследуем сходимость ряда в точках x=-1 и x=1.

При x=-1 имеем ряд:

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+(-1)^n\frac{1}{n^2}+....$$

В силу признака Лейбница он сходится. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...,$$

Составленный из абсолютных величин его членов. Есть обобщенный гармонический ряд, который сходится, так как p=2>1.

При x=1 получим тот же самый обобщенный гармонический ряд. Следовательно, данный ряд сходится в промежутке $-1\le x\le 1$.

д). $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^n=1+2(x-1)+2^2(x-1)^2+...+2^n(x-1)^n+...$

Решение:

Пусть $x-1=y$, тогда получим ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n y^n \quad (**).$$

Используя формулу (*) получим:

$$a_n=2^n, a_{n+1}=2^{n+1};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}; R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Значит ряд сходится на промежутке $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$

Исследуем сходимость ряда в точках $y=-\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{2}$.

При $y=-\frac{1}{2}$ имеем ряд:

$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-...$, который расходится.

При $y=-\frac{1}{2}$ имеем ряд:

$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}1^n=1+1+1+...$, который также расходится.

Следовательно ряд (**) сходится при $-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$.

Выразив y через x, получим $-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

Эта искомая область сходимости данного ряда.

6. Разложение функций в степенные ряды.

Ряды Тейлора и Маклорена.

Рядом ***Тейлора*** для функции *f(x)* называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \qquad (1)$$

Если *a=0*, то получим частный случай ряда Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ..., \qquad (2)$$

который называется рядом ***Маклорена***.

Для разложения функции *f(x)* в степенной ряд Маклорена необходимо:

1). Вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке *x=0*, т. е. *f(0)*, $f'(0), f''(0),..., f^{(n)}(0)$;

2). Составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу (2).

3). Найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле (*).

<u>Примеры:</u> Разложите в ряд Маклорена функции.

1). $f(x)=e^x$,

Решение:

1. $f(x)=e^x$, $\qquad f(0)=e^0=1$,

$f'(x) = e^x$, $\qquad f'(0) = 1$,

$f''(x) = e^x$, $\qquad f''(0) = 1$,

... $\qquad$ ...

$f^{(n)}(x)=e^x$, $\qquad f^{(n)}(0)=1$,

... $\qquad$ ...

2. Подставим полученные значения в формулу (2), получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Этот ряд называется *экспоненциальным рядом.*

3. Промежуток сходимости ряда найдем по формуле (*):

$$a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1; R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

Следовательно промежуток сходимости если $-\infty < x < \infty$, то есть данный ряд сходится к функции $f(x)=e^x$ на всей числовой оси.

2). *f(x)=sinx*.

Решение:

1. *f(x)= sinx,* $\qquad$ *f(0)=sin0=0,*

$$f'(x)=\cos x, \qquad f'(0)=\cos 0=1,$$
$$f''(x)=-\sin x, \qquad f''(0)=-\sin 0=0,$$
$$f'''(x)=-\cos x, \qquad f'''(0)=-\cos 0=-1,$$
$$f^{IV}(x)=\sin x, \qquad f^{IV}(0)=\sin 0=0 \ .$$

2. Подставим полученные значения в формулу (2), получим:

$$\sin x=0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...=$$

$$=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

3. Промежуток сходимости ряда найдем по формуле (*):

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)!}, a_{n+1}=\frac{1}{[2(n+1)-1]!}=\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{(2n+1)n(2n-1)!};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(2n+1)2n(2n-1)!}{(2n-1)!}=(2n+1)2n; R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}|(2n+1)2n|=\infty,$$

Следовательно промежуток сходимости если $-\infty<x<\infty$, то есть данный ряд сходится к функции *f(x)=sinx* на всей числовой оси.

3). $f(x)=\ln(1+x)$

Решение:

1.

$$f(x)=\ln(1+x), f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}, f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}, f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}, f'''(0)=2!$$

$$f^{IV}(x)=-\frac{3!}{(1+x)^4}, f^{IV}(0)=-3!$$

...

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

2. Подставим полученные значения в формулу (2), получим:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$$

Этот ряд называется *логарифмическим рядом.*

3. Используя формулу (*) получим:

$$a_n=\frac{1}{n}, a_{n+1}=\frac{1}{n+1};$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}; R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1,$$

Значит ряд сходится на промежутке $-1<x<1$

Исследуем сходимость ряда в точках x=-1 и x=1.

При x=-1 ряд становится гармоническим:

$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...-\frac{1}{n}-...$, а он расходится.

При x=1 имеем знакочередующийся ряд:

$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+...$, который сходится по признаку Лейбница.

Итак, ряд сходится на промежутке $-1<x\le 1$.

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

I-В	II-В
1. Найдите первые четыре члена ряда по заданному общему:	
$a_n=\frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$	$a_n=\frac{3n+2}{(3n-1)2^{n-1}}$.
2. Найдите формулу общего члена ряда:	
$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{3}+...$	$\frac{5}{1}+\frac{9}{2}+\frac{13}{3}+...$.
3. Используя необходимый и достаточный признаки сходимости, исследуйте ряды:	
а). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$	а). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$
б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$	б). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$.
4. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость:	
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(4n-1)^2}$
5. Найдите промежуток сходимости степенного ряда:	
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$
6. Разложите в ряд Маклорена функцию:	
а). $f(x)=1+\cos x$	а). $y=1+\ln(1+x)$
б). $y=\ln(1+2x)$	б). $f(x)=\cos 2x$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение числового ряда.
2. Введите необходимый признак сходимости числовых рядов.
3. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов.
4. Дайте определение функционального ряда.
5. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.
6. Дайте определение степенных рядов.
7. Объясните ход выполнения своей работы.
8. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа №17.

Тема: **Множества. Операции над множествами.**

Цель: повторить понятие множества(подмножества); элементы множеств; отработать навыки выполнения действий над множествами.

Краткие теоретические сведения:

- **Множество и его элементы.**
- **Пересечение множеств.**
- **Объединение множеств.**
- **Вычитание множеств. Дополнение до множеств.**

1. Множество и его элементы.

Определение1: Множество представляет собой соединение, собрание, совокупность некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку.

Примеры: 1). Множество учащихся группы ВМ09;
2). Множество букв алфавита;
3). Множество точек на прямой;
4). Множество книг на полке.

Предметы, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Примеры: 1). Петров- учащийся группы ВМ09;
2). Буква О- элемент множества букв русского алфавита.

Элементы множества обозначают малыми буквами латинского или греческого алфавита.

Для обозначения множеств используют заглавные буквы латинского алфавита А,В,С,… или скобки $\{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$.

Запись $\alpha \in A$ означает, что элемент α принадлежит множеству А.

Запись $\alpha \notin A$ означает, что элемент α не принадлежит множеству А.

Пример: $N = \{1,2.3,...\}$- множество натуральных чисел.
$2 \in N, 0 \notin N$.

Определение 2: Множество считается заданным, если или перечислены все его элементы, или указано свойство его элементов, которое позволяет судить о том, принадлежит ли данный элемент множеству или нет.

Пример: М- множество четных чисел.
Свойство: все числа делятся нацело на два.
Обозначают: $M = \{x \in N \mid x \vdots 2\}$.

Фигурные скобки- наличие множества.

|- таких, что.

⋮- делится нацело.

Определение 3: Множества, состоящие из одних и тех же элементов называются *равными* и обозначаются: $A = B$.

Определение 4: Если любой элемент множества В является и элементом множества А, то множество В называется *подмножеством* множества А и обозначается: $B \subset A$ или $A \supset B$.

В силу определения любое множество является своим подмножеством.

Определение 5: Множество, которое не содержит ни одного элемента называется пустым и обозначается: Ø.

<u>Пример:</u> $A = \{1,2,3\}$. Найти все подмножества.

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}, \varnothing$.

2. Пересечение множеств.

Рассмотрим множество натуральных чисел, кратных числу 2 и множество натуральных чисел, кратных числу 3. То есть:

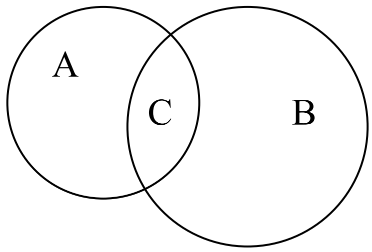
$A = \{x \in N \mid x \vdots 2\}$ и $B = \{x \in N \mid x \vdots 3\}$.

Нетрудно заметить, что множество натуральных чисел, кратных числу 6, входит в каждое из двух рассмотренных, то есть:

$C = \{x \in N \mid x \vdots 6\}$.

Определение 6: Множество С, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств А и В называется пересечением множеств А и В и обозначается: $C = A \cap B$.

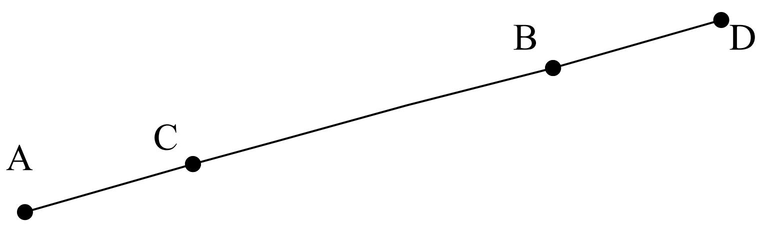
<u>Примеры:</u> 1). $C = A \cap B$



2). $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$.

$C = A \cap B = \{2\}$.

3).



$AB \cap CD = CB$.

Определение 7: Два множества, пересечение которых является пустым множеством, являются *непересекающимися.*

3.Объединение множеств.

Определение 8: Объединением двух множеств А и В называется такое множество С, которое состоит из всех элементов А и В и только из них и обозначается: $C = A \cup B$.

Пример: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$.

$C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$.

Если множества А и В имеют общие элементы, то каждый из них берется только один раз!

4. Вычитание множеств. Дополнение до множеств.

Определение 9: Пусть даны два множества А и В. Множество С, которое состоит из всех элементов множества А, не принадлежащих множеству В, называется разностью множеств А и В и обозначается: $C = A / B$.

Примеры: 1). $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4\}$.

$C = A / B = \{1,2\}$.

2). $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$.

$C = A / B = \{1,2\}$.

3). $A = \{1,2,5\}$, $B = \{3,4\}$.

$C = A / B = \{1,2,5\}$.

4). $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$.

$C = A / B = \varnothing$.

Определение 9: Если $A \supset B$, то разность A / B называется дополнением множества В до множества А.

Ход выполнения работы:

2. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

I-В	II-В
1. Пусть А - множество всех корней уравнения:	
$x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 9x + 30 = 0.$	$\frac{2x^2 - 1}{x - 1} - \frac{16x - 7}{x + 3} = 2.$
Какие из чисел -2, 2, 5, 6, $\pm\sqrt{3}$ являются элементами множества А?	Какие из чисел -2, 2, 1, 2+$\sqrt{3}$, -$\sqrt{3}$ являются элементами множества А?

2. Найдите все подмножества множества:

C=$\left\{0,1,2,-\frac{1}{2}\right\}$.

C=$\left\{-3,1,2,2\frac{1}{2}\right\}$.

3. Найдите $A \cup B, A \cap B, A / B, B / A$, если:

а). $A = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$,
$B = \{-2,-1,0,1,2,3,4\}$;
б). $A = \{-2,-1,3,5,7\}$,
$B = \{0,1,3\}$;

а). $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,
$B = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$;
б). $A = \{-3,-1,4,8,9\}$,
$B = \{1,4,10\}$;

4. Пусть М –множество всех корней уравнения:

$x^3 - 7x + 6 = 0$.
Найдите $M \cap (A \cap B)$, если:
$A = \{1,2,3\}$ и $B = \{-3,0,2\}$.

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
Найдите $M \cup (A \cup B)$, если:
$A = \{0,1,2\}$ и $B = \{-1,-2,4\}$.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение множества.
2. Введите определение действий на множествах.
3. Дате определение подмножества.
4. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа №18.

Тема: **Основные понятия комбинаторики.**

Цель: отработать навыки вычисления применения факториала и формул перестановок, размещения и сочетания для решения задач.

Краткие теоретические сведения:

- **Перестановки.**
- **Размещения.**
- **Сочетания.**

Основные понятия комбинаторики.

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются *соединениями*.

Различают три основных вида соединений: размещение, перестановки и сочетания.

1. Перестановки.

1). Понятие факториала.

Произведением всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют n-факториалом и пишут

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n.$$

<u>Примеры:</u>

1). Вычислить:

а). $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

б). $7! - 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!(6\cdot 7-1) = 120\cdot 41 = 4920$.

в). $\dfrac{7!+5!}{6!} = \dfrac{5!(6\cdot 7+1)}{6!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 43}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{43}{6}$.

2). Упростить выражение:

а). $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} = n+1$.

б). $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)} = n(n+1)$.

в). $\dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} + \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} = \dfrac{1+n+1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = \dfrac{n+2}{(n+1)!}$.

2). Перестановки.

Пусть даны три буквы A, B и C. Составим все всевозможные комбинации из этих букв: ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA (всего 6 комбинаций). Мы видим, что они отличаются друг от друга порядком расположения букв.

Определение 1: Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками.*

Перестановки обозначаются символом P_n, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку.

Число перестановок можно вычислить по формуле:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \qquad (1)$$

или

$$P_n = n! \qquad (2)$$

Так число перестановок из трех элементов согласно формуле (2) составляет:

$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, что совпадает с результатом рассмотренного примера.

<u>Примеры:</u>

1). В соревнованиях участвовало 4 команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Решение:

$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

2). Вычислить: $\dfrac{P_6 - P_5}{5!}$.

Решение:

$$\frac{P_6 - P_5}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \ldots \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = \frac{6-1}{1} = 5.$$

2. Размещения.

Определение 2: Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются *размещениями.*

Число размещений из m элементов по n обозначается символом A_m^n, где m-число всех имеющихся элементов, а n- число элементов в каждой комбинации.

$$A_m^n = \underbrace{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}_{n\ \text{ìíîæèòåëåé}} \qquad (3)$$

или

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad (4).$$

<u>Примеры:</u>

1). Вычислить: а). A_6^3; б). $\dfrac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5}$;

Решение:

а). $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ или $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot 6}{3!} = 120$.

б). $\dfrac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 + 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13(1+12)}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \dfrac{13}{132}$.

2). Решите уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Решение:

$A_n^5 = 30A_{n-2}^4$,

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$,

$n(n-1) = 30(n-5)$,

$n^2 - 31n + 150 = 0$,

$n_1 = 6, n_2 = 25$.

3). Сколькими способами из семи кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

$A_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

3. Сочетания.

Определение 3: Сочетаниями из из m элементов по n элементов в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Обозначается: C_m^n.

Находится по формуле: $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{P_n}$ или $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$. (6).

В решении задач часто используются формулы: $C_m^n = C_m^{m-n}$, $C_m^m = 1$, $C_m^0 = 1$,
$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

<u>Примеры:</u>

1). Вычислить: а). $C_8^3 = \dfrac{8!}{(8-3)!3!} = \dfrac{8!}{5!3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$.

б). $C_6^4 + C_5^0 = \dfrac{6!}{(6-4)!4!} + 1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 1 = 16$.

2). Решите уравнение: $C_{x-2}^{2} = 21$.

Решение:

$C_{x-2}^{2} = 21,$

$\dfrac{(x-2)!}{(x-2-2)!2!} = 21,$

$\dfrac{(x-2)!}{(x-4)!2!} = 21,$

$\dfrac{1\cdot 2\cdot ..\cdot (x-4)(x-3)(x-2)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot (x-4)\cdot 1\cdot 2} = 21,$

$\dfrac{(x-3)(x-2)}{2} = 21,$

$x^2 - 3x - 2x + 6 = 42,$

$x^2 - 5x - 36 = 0,$

$x_1 = -4, x_2 = 9.$

3). Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствует 78 человек?

Решение:

$$C_{78}^{2} = \frac{78!}{(78-2)!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot ...\cdot 76\cdot 77\cdot 78}{1\cdot 2\cdot ...\cdot 76\cdot 1\cdot 2} = 77\cdot 39 = 3003$$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

I-В	II-В
1. Упростите выражения:	
а). $\dfrac{(n+1)!}{n}$.	а). $\dfrac{n!}{(n-2)!}$.
б). $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$.	б). $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$.
2. Вычислите значения выражений:	
а). 5!+6!	а). $\dfrac{52!}{50!}$
б). $\dfrac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$	б). $A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$
3. Решите уравнения:	
а). $20A_{n-2}^{3} = A_n^5$	а). $A_n^4 = 15A_{n-2}^{3}$

б). $A_7^3 = 42x$

б). $A_{m+1}^3 = 5m(m+1)$

в). $\dfrac{A_x^4 + A_x^2}{A_x^2} = 13$

в). $A_{2x}^3 = 14A_x^3$

г). $8C_{2n+1}^{n+1} = 5C_{2n+2}^{n+2}$

г). $13C_{2n}^{n+1} = 8C_{2n+1}^{n-1}$.

4. Докажите тождество:

$C_n^9 + C_n^8 = C_{n+1}^9$

$C_{n+3}^5 + C_{n+3}^4 = C_{n+4}^5$

5. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений?
6. Сколькими способами из 15 рабочих можно создать бригады по 5 человек в каждой?

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Дайте определение соединения.
2. Дайте определение факториала. Запишите формулу n-факториала.
3. Дайте понятие размещения, перестановок и сочетаний.
4. Объясните, как применяются формулы для решения задач вашей практической.
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

Практическая работа №19.

Тема: **Основные понятия теории вероятностей. События. Операции над событиями.**

Цель: отработать навыки вычисления вероятности события ; применять формулы сложения и умножения вероятностей для решения задач комбинаторики.

Краткие теоретические сведения:

- **Случайные события.**
- **Классическое определение вероятности.**
- **Теоремы сложения вероятностей.**
- **Теоремы умножения вероятностей.**

1. Случайные события.

Изучение каждого явления в порядке или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием.*

Все рассматриваемые события будем считать *равновозможными* , то есть такими, которые имеют равные возможности произойти.

События обозначаются заглавными латинскими буквами: A, B, C,…

Определение 1: Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным.*

<u>Пример:</u> Появление цифр при подбрасывании монеты.

*Определение 2:*В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, - *невозможным.*

<u>Примеры:</u>

1). Выигрыш по беспроигрышной лотереи есть событие достоверное.

2). При бросании игральной кости нельзя получить число 7.

Определение 3: События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление одного из них. События называют *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

<u>Примеры:</u>

1). При подбрасывании монеты появление цифры исключает появление герба (несовместные события).

2). В дождливую погоду не исключается града или ветра.(совместные события).

Определение 4: События называются *противоположными,* если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

И обозначаются $A, \overline{A}$.

2. Классическое определение вероятности.

Определение 5: Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных).

И обозначается: $P(A)=\dfrac{m}{n}$,   (1)

где $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)=0$, а достоверному-вероятность $P(A)=1$.

Примеры:

1). В лотерее из 100 билетов имеется 200 выигрышных. Вынимают наугад 1 билет. Какова вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение:

Общее число всех выигрышных исходов есть n=1000.

Число исходов, благоприятствующих событию получению выигрыша m=200.

Тогда, по формуле (1), имеем:

$$P(A)=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

2). Бросают игральную кость. Найдите вероятность того, что: а). выпадет четное количество очков (событие А) ; б). выпадет число очков кратное 3 (событие В) ; в). выпадет любое число очков, кроме 5 (событие С).

Решение:

а). На гранях игральной кости имеются три четные цифры (2, 4, 6), то есть число искомых исходов m=3.

Число всех возможных исходов равно 6 (выпадает любое число очков от 1 до 6). Значит:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

б). Здесь имеются две цифры, кратные 3: 3 и 6. Следовательно m=2, а число всех возможных исходов n=6. Тогда:

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

в). Искомыми исходами являются цифры 1, 2, 3, 4, 6- всего их пять (m=5). Число всех возможных исходов n=6. Тогда:

$$P(C)=\frac{5}{6}$$

3). Из урны, в которой находятся 5 белых и 3черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Решение:

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через А. Общее число случаев n=5+3=8. Число случаев, благоприятствующих появлению события А, равно 3. Тогда:

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

4). Даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Найти вероятность того, что, выбрав наугад две точки, учащийся получит нужную прямую.

Решение:

Пусть А- событие выбор искомой прямой. Число всех возможных исходов равно количеству прямых, проходящих через заданные пять точек.

Так как прямая определяется парой точек и порядок точек внутри этой пары не имеет значения, то каждая пара должна отличаться хотя бы одной точкой. Следовательно, мы должны найти число сочетаний из пяти элементов по два, то есть:

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10 .$$

Значит, число всех возможных пар точек равно 10, а искомой является только одна пара точек, тогда:

$$P(A) = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

5). Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

Обозначим событие, состоящее в появлении двух черных шаров, через А.

Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (18+2) по 2:

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!2!} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190 .$$

Число m, благоприятствующих событию А, составляет:

$$n = C_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28 .$$

Тогда: $P(A) = \frac{28}{190} = \frac{14}{95} = 0{,}147$.

6). В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Найдите вероятность того, что из этих пяти деталей две окажутся бракованными.

Решение:

Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^5 = \frac{18!}{(18-5)!5!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568 .$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию А.

Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$m_1 = C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся качественных равно:

$$m_2 = C_{14}^3 = \frac{14!}{(14-3)!3!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет:

$$m = m_1 \cdot m_2 = 6\cdot 364 = 2184.$$

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{2184}{8568} = 0{,}255.$$

3. Теоремы сложения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:
Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \qquad (2)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:
Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (3)$$

Так как событие противоположное событию A (то есть не наступление события A) обозначают $\overline{A}$, то сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (4)$$

Определение 6: Вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло, называется *условной вероятностью* события A при условии B и обозначается:
$P_B(A)$ или $P(A/B)$

Если A и B независимые события, то

$$P(B) - P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) \qquad (5)$$

Определение 7: События A, B, C, … называются *независимыми в совокупности*, если вероятность каждого из них не меняется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Примеры:

1). В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие А).

Решение:

Очевидно, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий:

В- одна деталь стандартная, две нестандартные;

С- две детали стандартные, одна нестандартная;

D - три детали стандартные;

Таким образом, событие А можно представить в виде суммы этих трех событий: $A = B + C + D$.

По теореме сложения вероятностей имеем: $P(A) = P(B) + P(C) + P(D)$.

Находим вероятность каждого из этих событий.

а). В- одна деталь стандартная, две нестандартные;

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию В.

Среди 3 взятых наугад деталей должно быть 1 стандартная и 2 нестандартные. Число способов выборки 1 стандартной деталей из 5 имеющихся стандартных равно числу сочетаний из 5 по 1:

$$m_1 = C_5^1 = \frac{5!}{(5-1)!1!} = \frac{5}{1} = 5$$

Число способов выборки 2 нестандартных деталей из 15 имеющихся нестандартных равно:

$$m_2 = C_{15}^{2} = \frac{15!}{(15-2)!2!} = \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 105.$$

Любая группа стандартных деталей может комбинироваться с любой группой нестандартных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет:

$m = m_1 \cdot m_2 = 5 \cdot 105 = 525$.

Искомая вероятность события В равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(B) = \frac{525}{1140} = \frac{105}{228} = \frac{35}{76}.$$

б). С- две детали стандартные, одна нестандартная;

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию С.

Среди 3 взятых наугад деталей должно быть 2 стандартные и 1 нестандартная. Число способов выборки 2 стандартных деталей из 5 имеющихся стандартных равно числу сочетаний из 5 по 2:

$$m_1 = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$$

Число способов выборки 1 нестандартных деталей из 15 имеющихся нестандартных равно:

$$m_2 = C_{15}^1 = \frac{15!}{(15-1)!1!} = \frac{15}{1} = 15.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных деталей, поэтому общее число комбинаций m составляет:

$$m = m_1 \cdot m_2 = 10\cdot 15 = 150.$$

Искомая вероятность события C равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(C) = \frac{150}{1140} = \frac{15}{114} = \frac{5}{38}.$$

в). D- три детали стандартные;

$$n = C_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию D.

Среди 3 взятых наугад деталей должно быть 3 стандартные. Число способов выборки 3 стандартных деталей из 5 имеющихся стандартных равно числу сочетаний из 5 по 3:

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

Искомая вероятность события D равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(D) = \frac{10}{1140} = \frac{1}{114}.$$

Сложив найденные значения, получим:

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0{,}601.$$

2). Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Решение:

Пусть A- событие. Состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а B- в том, что оно кратно 5.

Найдем $P(A+B)$. Так как A и B совместные события, то воспользуемся формулой (3): $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Всего имеется 90 двузначных чисел: 11, 12, …, 98, 99.

Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют событию А).
18- кратными 5 (благоприятствуют событию В).
6- кратными одновременно 3 и 5(благоприятствуют событию АВ).
Таким образом:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}, \quad P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}, \quad P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}.$$

Тогда:

$$P(A+B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467.$$

4. Теоремы умножения вероятностей.

Теорема умножения вероятностей независимых событий:
Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B) \qquad (6)$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n) \qquad (7)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:
Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A) \qquad (8)$$

Примеры:

1). В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение:

Пусть А- появление белого шара из 1 урны, а В- появление белого шара из 2 урны. Очевидно, что события А и В независимы.

Найдем:

$$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}, \quad P(B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

По формуле (6) получим:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

2). В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение:

Пусть А- первая взятая деталь стандартная, В- вторая взятая деталь стандартная. Найдем вероятность А:

$$P(A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, то есть условная вероятность события В, равна:

$$P_A(B)=\frac{7}{11}.$$

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по формуле (8):

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{11}=\frac{14}{33}=0{,}424.$$

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

1 вариант.

1. Из урны, в которой находятся 10 белых и 2 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.
2. Из урны, в которой находятся 10 белых и 6 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?
3. В партии из 24 деталей находятся 5 бракованных. Наугад выбирают 4 деталей. Найдите вероятность того, что из этих четырех деталей две окажутся бракованными.
4. В ящике в случайном порядке разложены 15 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие А).
5. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено 30 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, учащийся ответит на все вопросы, если он подготовил 52 теоретических вопросов и 20 задачи.

2 вариант.

1. Из урны, в которой находятся 9 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.
2. Из урны, в которой находятся 9 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?
3. В партии из 21 деталей находятся 6 бракованных. Наугад выбирают 4 деталей. Найдите вероятность того, что из этих четырех деталей две окажутся бракованными.

4. В ящике в случайном порядке разложены 25 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной (событие А).
5. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено 32 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, учащийся ответит на все вопросы, если он подготовил 54 теоретических вопросов и 24 задачи.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Понятие случайного события.
2. Сформулировать классическое определение вероятности. Запишите формулу.
3. Теоремы сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.
4. Теоремы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.
5. Объясните решение задач своего варианта.

Практическая работа №20.

Тема: **Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины. Закон распределения случайной величины.**

Цель: научить строить ряд распределения случайной величины, находить функцию распределения случайной величины.

Краткие теоретические сведения:

- **Формула Бернулли.**
- **Закон распределения случайной величины.**
- **Биномиальное распределение.**

1. Формула Бернулли.

Рассмотрим задачу, в которой проводятся независимые повторные испытания с двумя исходами:

Задача 1:

Стрелок выполняет три попытки. Успех (попадание в цель) и неуспех (промах) каждой из них не зависит от исходов других попыток, а вероятность успешного завершения каждой попытки постоянна и равна p. Найти вероятность успешного завершения двух попыток из трех.

Решение:

Пусть A_1, A_2 и A_3 – соответственно успех в 1-ой, 2-ой и 3-ей попытке. Тогда две удачные попытки отвечают следующим событиям: $A_1A_2\overline{A_3}$ - две первые попытки удачны, третья нет; $A_1\overline{A_2}A_3$ - удачно первая и третья попытка вторая неудачна; $\overline{A_1}A_2A_3$ - удачны две последние попытки, первая неудачна.

Интересующее нас событие можно записать как сумму $A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$.

Так как события входящие в эту сумму, несовместны, а события A_1, A_2 и A_3- независимы, то по формулам сложения и умножения находим:

$P(A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3) = P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}A_2A_3) =$
$=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$.

Но вероятность попадания в цель в каждой попытке есть p, поэтому вероятность промаха равна g =1- p. Подставим эти значения, получим :

$P(A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3) = p*p*(1- p) + p*(1- p)*p + (p – 1)*p*p =3p^2(1- p)$.

На этом примере мы познакомились с общей схемой, которая была рассмотрена швейцарским математиком Я. Бернулли, и называется *схемой Бернулли*.

В общем случае эта схема приводит к формуле:

$$P(A_{n\ ,\ k}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k g^{n-k} \quad ,$$

которая называется *формулой Бернулли.*

Задача 2:

Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что при этом герб выпадает ровно три раза?

Решение:

Пусть $A_{10,3}$ – событие состоящее в том при 10-кратном подбрасывании монеты герб выпадает 3 раза. При этом вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$, т. е. $p=\frac{1}{2}$. Тогда $g=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу Бернулли, получим:

$$P(A_{10,3})=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{10!}{3!*7!}*\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{7!*8*9*10}{7!*1*2*3*2^{10}}=\frac{8*3*5}{1024}=\frac{15}{128}.$$

<u>Задача 3:</u>

Вероятность того, что лампа останется неисправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что из 5 ламп менее трех останутся исправными после 1000 часов работы?

Решение:

Будем рассматривать горение каждой лампы в течении 1000 часов как отдельный опыт. Тогда можно сказать, что проведено 5 опытов. Нас интересуют события «горят 3 лампы из 5», «горят 4лампы из 5» и «горят 5 ламп из 5», т. е. мы можем найти вероятность каждого из этих событий по формуле Бернулли, учитывая, что p=0,2 и g=0,8:

$$A_{5,3}=C_5^3 p^3 g^2=\frac{5!}{3*!2!}*0{,}2^3*0{,}8^2=0{,}0512;$$

$$A_{5,4}=C_5^4 p^4 g^1=\frac{5!}{4!*1!}*0{,}2^4*0{,}8=0{,}0084;$$

$$A_{5,5}=C_5^5 p^5 g^0=\frac{5!}{5!}*0{,}2^5*1=0{,}00032;$$

Тогда искомая вероятность составит 0,0512+0,0084+0,00032=0,0579.

2. Закон распределения случайной величины.

В примерах, с которыми мы встретились ранее, случайные события характеризуются с помощью чисел (число случаев брака, число попаданий при стрельбе, число родившихся мальчиков). Такое положение типично для теории вероятностей. При этом случайный характер исхода влечет за собой случайность числа; это означает, что при повторении опыта оно меняется непредвиденным образом.

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита (X, Y, Z), и их значения – соответствующими строчными буквами.

Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные.

Дискретными случайными величинами называются случайные величины, принимающие лишь конечное или счетное множество значений.

Функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения* дискретной случайной величины. Его удобно задавать в виде следующей таблицы:

Значения x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n

Вероятности p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n

События $X= x_i$ (i=1, 2, 3, …, n) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Задача 1:

Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 рублей и одна вещь стоимостью 30 рублей. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего 1 билет из 50.

Решение:

Искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5 и 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату - два случая и третьему – один случай. Найдем их вероятности:

$P(x_1)=\frac{47}{50}=0{,}94$; $P(x_2)=\frac{2}{50}=0{,}04$; $P(x_3)=\frac{1}{50}=0{,}02$;

Закон распределения случайной величины имеет вид:

Значения x_i	0	5	30
Вероятности p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 0{,}94+0{,}04+0{,}02=1$.

Задача 2:

Из урны, содержащей 2 черных и 3 белых шара, наудачу вынимают 2 шара. Пусть X- число выпавших черных шаров. Найти закон распределения X.

Решение:

Искомая величина X представляет собой три возможных случая: 0- черных (2 белых), 1 черный(1 белый), 2 черных (0 белых). Найдем их вероятности:

а). 0- черных (2 белых):

Всего шаров: 2 белых +3 черных=5 шаров, наудачу вынимают 2 шара, тогда

$n=C_5^2=\frac{5!}{2!*(5-2)!}=\frac{1*2*...*5}{1*2*1*2*3}=10$ - общее число возможных случаев.

Найдем количество комбинаций для нашего случая:

$m=C_3^2=\frac{3!}{2!*(3-2)!}=\frac{1*2*3}{1*2*1}=3$, тогда $P(x_1)=\frac{3}{10}$;

б). 1 черный(1 белый),

n=10,

Найдем количество комбинаций для нашего случая:

$m=C_2^1*C_3^1=\frac{2!}{1!*(2-1)!}*\frac{3!}{1!*(3-1)!}=\frac{1*2}{1*1}*\frac{1*2*3}{1*1*2}=6$, тогда $P(x_2)=\frac{6}{10}$;

в). 2 черных (0 белых),

n=10,

$m=C_2^2=1$, тогда $P(x_1)=\frac{1}{10}$;

Закон распределения имеет вид:

Значения x_i	0	1	2
Вероятности p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

В качестве проверки найдем $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = 1$.

3. Биномиальное распределение.

Пусть производится определенное число n независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие р. Рассмотрим случайную величину X, представляющую собой число наступлений событий А в n опытах. Закон ее распределения имеет вид:

Значения x_i	0	1	2	…	n
Вероятности p_i	$P(A_{n,0})$	$P(A_{n,1})$	$P(A_{n,2})$	…	$P(A_{n,n})$

где $P(A_{n,k})$ вычисляются по формуле Бернулли.

Закон распределения, который характеризуется такой таблицей, называется *биномиальным.*

Задача 1:

Монету подбрасывают 5 раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадения герба.

Решение:

Возможны следующие значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность выпадения герба в одном испытании равна $\frac{1}{2}$, найдем вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$$P(A_{5,0}) = C_5^0 p^0 g^5 = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32};$$

$$P(A_{5,1}) = C_5^1 p^1 g^4 = 5 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 * \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,2}) = C_5^2 p^2 g^3 = 10 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,3}) = C_5^3 p^3 g^2 = 10 * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,4}) = C_5^4 p^4 g^1 = 5 * \left(\frac{1}{2}\right)^4 * \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,5}) = C_5^5 p^5 g^0 = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^5 * \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32};$$

Закон распределения имеет вид:

Значения x_i	0	1	2	3	4	5

Вероятности p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Произведем проверку: $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=1$.

Ход выполнения работы:

1. Выполнить задания по вариантам, используя при необходимости методические указания.

Задания:

Вариант 1:

1). Установите, задает ли закон распределения какой-либо случайной величины следующая таблица:

-1	2	3	4
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2). Из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара, вынимают на удачу два шара. Найдите закон распределения X числа вынутых белых шаров.

3). Два шахматиста, играющие в одинаковую силу, сыграли матч из шести партий (ничьих в матче не было). Пусть X – число партий, выигранных одним из шахматистов. Найдите закон распределения X.

Вариант 2:

1). Установите, задает ли закон распределения какой-либо случайной величины следующая таблица:

-2	-1	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

2). Из урны, содержащей 5 белых и 5 черных шаров, вынимают на удачу три шара. Пусть X – число вынутых черных шаров. Найти закон распределения X.

3). По одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет три самолета. Вероятность посадки вне расписания для каждого равна 0,3. Составить закон распределения случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания.

2.Приготовить устно ответы на вопросы к защите практической работе. Защитить выполненную работу.

Вопросы для защиты:

1. Формула Бернулли.
2. Закон распределения случайной величины.
3. Биномиальное распределение.
4. Объясните решение задач практической.
5. Чему вы научились при выполнении практической работы?

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.

Производные элементарных функций

1. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$,
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
3. $(C)' = 0$,
4. $(x)' = 1$,
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$,
6. $(\sin x)' = \cos x$,
7. $(\cos x)' = -\sin x$,
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
11. $(\lg x)' = \frac{0{,}4343}{x}$,
12. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$,
13. $\left(e^x\right)' = e^x$,
14. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$,
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
17. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
18. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приложение 2.

Производные сложных функций.

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$,

2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$,

3. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$,

4. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,

5. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$,

6. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$,

7. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$,

8. $(\lg u)' = \frac{0{,}4343}{u} \cdot u'$,

9. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$,

10. $(e^u)' = e^u \cdot u'$,

11. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$,

12. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,

13. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$,

14. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Приложение 3.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$,
2. $\int dx = x + C$,
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$,
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$,
5. $\int e^x dx = e^x + C$,
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
8. $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln|\cos x| + C$,
9. $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\sin x| + C$,
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$,
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$,
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$,
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.

Литература.

Основные источники:

1. *С.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Форум,2011.
2. *С.А. Канцедал* Дискретная математика . М.: Форум,2011.
3. *В.В. Гарбарук, С.Е.Елизаров Математика.* Тезисы курса высшей математики для ВТУЗов. ПГУПС. 2011.

Дополнительные источники:

1.*Д.Т. Письменный* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: Айрис-Пресс,2010.

Интернет-ресурсы:

1. Сайт: http:// shool-collection.edu.ru
2. «Математика»: учебно-методическая газета.
3. «Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru
4. Электронная библиотека. Форма доступа: www.math.ru/lib
5. Электронно-библиотечная система «Лань»: http: e landbook.com/books